

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

MATE GRGIĆ

**LOKALNO OPTEREĆENJE I ODZIV
STRUKTURE BRODA USLIJED
UDARANJA O VALOVE**

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2015.

University of Zagreb
Faculty of Mechanical Engineering and Naval
Architecture

MATE GRGIĆ

**LOCAL LOAD AND RESPONSE
OF A SHIP STRUCTURE DUE TO
SLAMMING**

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2015.

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

MATE GRGIĆ

**LOKALNO OPTEREĆENJE I ODZIV
STRUKTURE BRODA USLIJED
UDARANJA O VALOVE**

DOKTORSKI RAD

Mentori:

Vedran Žanić, redoviti profesor u mirovini dr.sc.

Šime Malenica, izvanredni profesor dr.sc.

Zagreb, 2015.

University of Zagreb
Faculty of Mechanical Engineering and Naval
Architecture

MATE GRGIĆ

**LOCAL LOAD AND RESPONSE
OF A SHIP STRUCTURE DUE TO
SLAMMING**

DOCTORAL THESIS

Supervisors:

Vedran Žanić, Retaired professor
Šime Malenica, Associate professor

Zagreb, 2015.

PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU

UDK: 629.5.015.4:629.5.015.24

Ključne riječi: udaranje broda o valove, poopćena Wagne-rova metoda, poboljšana poopćena Wagne-rova metoda, desingularizacija potencijala, Kelvinova Greenova funkcija, metoda rub-nih elemenata, preslikavanje tlakova, lokalni odziv strukture

Znanstveno područje: Tehničke znanosti

Znanstveno polje: Brodogradnja

Institucija u kojoj je rad izrađen: Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje

Mentori rada: dr.sc. Šime Malenica, Bureau Veritas, Pariz
dr.sc. Vedran Žanić, redovni profesor u mi-rovini

Broj stranica: 152

Broj slika: 84

Broj tablica: 10

Broj bibliografskih jedinica: 78

Datum obrane: 16.07.2015.

Povjerenstvo: akademik Ivo Senjanović, profesor emeritus, predsjednik

dr.sc. Šime Malenica, Bureau Veritas, Pariz, mentor

dr.sc. Vedran Žanić, redovni profesor u mi-rovini, mentor

dr.sc. Jasna Prpić-Oršić, redovni profesor Sveučilišta u Rijeci, Tehničkog fakulteta

dr.sc. Zdravko Virag, redovni profesor

Institucija u kojoj je rad pohranjen: Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje

Zahvala

Uspješnom dovršenju ovog rada pridonijeli su brojni profesori, kolege, prijatelji i moji bližnji kojima se ovim putem najiskrenije zahvaljujem:

Hvala mentoru doktorskog rada dr.sc. Šimi Malenici na ljudskosti i znanju koje je nesebično dijelio tijekom brojnih rasprava za vrijeme rada na disertaciji, hvala na istinskoj podršci i na motiviranju u najtežim trenucima.

Također, hvala i mentoru profesoru Vedranu Žaniću na korisnim savjetima koji su pridonijeli kvaliteti rada.

Zahvaljujem se i članovima komisije akademiku Ivi Senjanoviću, profesorici Jasni Prpić–Oršić i profesoru Zdravku Viragu na utrošenom vremenu pri čitanju rada i dobronamjernim primjedbama koje su mi dostavili. Posebna hvala profesoru Senjanoviću na detaljnom proučavanju rada i na pažnji i brizi koju je pokazao kao predsjednik komisije.

Hvala i kolegama iz Bureau Veritasa Quentinu Derbanneu i Jérômeu de Lauzonu na izvrsnim diskusijama tijekom mog boravka u Parizu koje su doprinijele kvaliteti rada.

Najljepša hvala mojim kolegama i prijateljima koje sam stekao na Fakultetu: Nikoli i Marku na podršci koju su iskazali u svakom trenutku, Stanku na savjetima vezanim za strukturni dio rada, Jadranki, Vedranu i bivšem cimeru Maru na pomoći kad god je trebalo te Sanji što me je potakla da naučim \LaTeX .

Veliko hvala mojoj obitelji, a posebno Maji na bezgraničnom strpljenju tijekom dugotrajnog rada na disertaciji.

Sadržaj

Predgovor	iv
Ključne riječi	v
Keywords	v
Sažetak	vi
Summary	vii
Popis slika	viii
Popis tablica	xi
Popis oznaka	xii
1. Uvod	1
1.1. Opis problema i motivacija za istraživanje	1
1.2. Pregled dosadašnjih istraživanja	3
1.3. Cilj i hipoteze istraživanja	7
1.4. Metodologija istraživanja i struktura rada	7
2. Problemi prodiranja tijela kroz tekućinu	10
2.1. Formulacija problema	10
2.2. Analitičke metode rješavanja problema	13
2.2.1. Von Karmanova metoda	13
2.2.2. Wagnerovo rješenje	14
2.2.3. Asimptotsko rješenje za male kutove nagiba	18
Faltinsenova metoda.	18
Cointeova metoda.	20
2.3. Modeli s djelomično pojednostavljenim rubnim uvjetima	20
2.3.1. Poopćeni Wagnerov model simetričnog prodiranja korištenjem konformnog preslikavanja	22
Klinasta tijela	25
Tijela kružnog poprečnog presjeka	26
Tijela s presjecima karakterističnih brodskih formi	26
2.4. Lokalno rješenje oko kontaktne točke	27
2.4.1. Vanjsko potencijalno strujanje oko konveksnih klinova	28

2.4.2.	Singularno ponašanje funkcije brzine fluida	29
2.4.3.	Funkcija konstante lokalnog rješenja	30
3.	Poopćena Wagnerova metoda	31
3.1.	Formulacija problema poopćene Wagnerove metode	31
3.2.	Rješavanje metodom rubnih elemenata	32
3.2.1.	Određivanje doprinosa slobodne površine za $ x \rightarrow \infty$	34
3.2.2.	Utjecajni koeficijenti	36
	Parametrizacija segmente krivulje	37
	Parametrizacija podintegralnih funkcija	38
	Analitička rješenja integrala	38
3.3.	Određivanje vremenskog koraka	39
3.3.1.	Simetrični uron tijela	40
3.3.2.	Nesimetrični uron tijela	43
3.4.	Stvaran oblik slobodne površine u trenutku t_{i+1}	43
3.5.	Računanje tlaka	44
3.6.	Analiza rezultata numeričkog proračuna	46
3.6.1.	Osnovni parametri proračunske domene	46
3.6.2.	Optimalna vrijednost funkcije $b(t)$ za klinasto tijelo	48
3.6.3.	Analiza konvergencije numeričkog proračuna	53
4.	Poboljšana poopćena Wagnerova metoda	57
4.1.	Greenova funkcija Kelvinovog tipa	57
4.2.	Desingularizacija rješenja u blizini kontaktne točke	58
4.3.	Formulacija problema za opći slučaj prodiranja tijela	60
4.3.1.	Schwartz-Christoffelovo preslikavanje	60
4.3.2.	Preslikavanje iz fizikalne u proračunsku domenu	61
4.3.3.	Rubni problem za nesimetričan uron	62
4.4.	Rješavanje metodom rubnih elemenata	63
4.4.1.	Utjecajni koeficijenti	64
	Parametrizacija segmentne krivulje	64
	Parametrizacija podintegralnih funkcija	65
	Rješavanje integrala	67
4.4.2.	Brzine fluida na slobodnoj površini	68
4.5.	Određivanje vremenskog koraka	69
4.5.1.	Simetrični uron tijela	69
4.5.2.	Nesimetrični uron tijela	73
4.6.	Stvaran oblik slobodne površine u trenutku t_{i+1}	74
4.7.	Računanje tlaka	75
4.8.	Verifikacija poboljšane poopćene Wagnerove metode	77
4.8.1.	Primjer 1 – simetrični klin	77
4.8.2.	Primjer 2 – nesimetrični klin	85
4.8.3.	Primjer 3 – polukružni presjek	86
5.	Lokalni odziv strukture uslijed udaranja o valove	89
5.1.	Problemi pri računanju lokalnog odziva uslijed udaranja	90

5.2.	Definiranje uvjeta udara	91
5.3.	Matematički model lokalnog odziva strukture	92
5.4.	Analiza dinamičkog modela	94
5.5.	Preslikavanje tlakova na strukturnu mrežu	96
5.6.	Analiza lokalnog odziva strukture na primjeru MKE modela dijela brodskog dna	102
5.6.1.	Opis strukture modela	102
5.6.2.	Diskretizirani MKE model i rubni uvjeti	103
	Gustoća mreže	104
	Rubni uvjeti	105
5.6.3.	Opterećenje modela	105
5.6.4.	Pomaci	111
5.6.5.	Naprezanja prema kriteriju von Misesa	114
5.6.6.	Smična naprezanja	117
6.	Zaključak	122
6.1.	Znanstveni doprinos doktorskog rada	124
6.2.	Primjena rezultata doktorskog rada pri projektiranju konstrukcije plovnihi objekata	124
6.3.	Smjernice za daljnja istraživanja	125
Dodatak A	Bilinearni četverokutni izoparametarski element	126
Dodatak B	Kratak opis metode rubnih elemenata [78]	128
	Kolokacijska metoda.	129
	Galerkinova metoda.	129
	Životopis	137
	Biography	138

Predgovor

Projektiranje tankostjenih konstrukcija kao što su brodovi i objekti morske tehnike u smislu zadovoljenja kriterija podobnosti i pouzdanosti uslijed impulsnih tipova opterećenja (udaranja, zapljuskivanja, naplavljivanja izloženih paluba, podvodnih eksplozija) vrlo je zahtjevan zadatak ponajviše zbog vrlo složene prirode tih pojava.

Pojava udaranja o valove, koja se detaljnije analizira u ovom radu, definira se kao udar slobodne površine tekućine na dio strukture plovnog objekta koji miruje ili se giba s velikim amplitudama pomaka. Prema načinu nastanka udaranje o valove može se podijeliti u četiri osnovna tipa:

- (i) udaranje dna plovnog objekta (na pramcu ili krmu);
- (ii) udaranje pramčanog izboja;
- (iii) udaranje lomećeg vala;
- (iv) udaranje mokre palube kod višetupaca.

Udaranje o valove čini bitan dio svih hidrodinamičkih opterećenja plovnih objekata koje može uzrokovati ozbiljna oštećenja elemenata strukture na lokalnoj odnosno globalnoj razini. Na lokalnoj razini to mogu biti npr. plastične deformacije vanjske oplata, lokalno izvijanje orebrenja itd., dok se na globalnoj razini javljaju prolazne vibracije cijelog trupa (podrhtavanje).

U cilju određivanja tlakova i neposrednih posljedica koje uzrokuje na strukturi, u fazi projektiranja plovnih objekata nužno je rješavati problem udaranja o valove zajedno s gibanjima tijela na valovima. U tom kontekstu postoje dva odvojena pristupa: "k" faktor metode i direktne metode proračuna. U "k" faktor metodama opterećenja uslijed udaranja određuju se na osnovi predefiniranih koeficijenata, dok direktne metode uključuju detaljnije modeliranje gibanja plovnog objekta. Kako je problem udaranja sam po sebi vrlo složen kao i uvjeti pod kojima nastaje, direktne metode zahtijevaju značajno dulje vrijeme računanja.

U ovom radu razmatrat će se direktni pristup proračuna temeljen na potencijalnom modelu hidrodinamičkog opterećenja i uz primjenu na lokalni odziv strukture plovnog objekta. Pri tome naglasak će biti stavljen na modeliranje opterećenja uz zadane početne uvjete udara (relativne brzine i položaja tijela), a na kraju će se takav model primijeniti u analizi lokalnog odziva. Premda se razmatra lokalni odziv, model opterećenja direktno je primjenjiv za spregu s hidroelastičnim modelom u svrhu proračuna podrhtavanja kod globalnog odziva.

Ključne riječi

udaranje broda o valove
poopćena Wagnerova metoda
poboljšana poopćena Wagnerova metoda
desingularizacija potencijala
Kelvinova Greenova funkcija
metoda rubnih elementa
preslikavanje tlakova
lokalni odziv konstrukcije

Keywords

slamming
Generalized Wagner Method
Enhanced Generalized Wagner Method
desingularization of the velocity potential
Kelvin's Green function
Boundary element method
pressure mapping
local response of a structure

Sažetak

U kontekstu hidrodinamičkih opterećenja tankostjenih struktura, na lokalnoj odnosno globalnoj razini odziva udaranje o valove predstavlja vrlo bitan dio s obzirom da može uzrokovati ozbiljna oštećenja lokalnih elemenata konstrukcije kao i prouzrokovati prolazne globalne vibracije trupa plovnog objekta.

U radu je razmatran direktni pristup proračunu tlakova uslijed udaranja o valove u preliminarnoj fazi projektiranja koji se zasniva na hidrodinamičkom modelu potencijalnog strujanja fluida.

Napravljen je opsežan uvid u postojeće metode proračuna pri čemu je detaljno objašnjena poopćena Wagnerova metoda (PW) koja danas predstavlja jedan od osnovnih načina rješavanja problema udaranja. Osnovna jednadžba problema izražava se pomoću Greenovog trećeg identiteta uz korištenje Greenove funkcije Rankinovog tipa čije rješenje se dobiva numerički pomoću metode rubnih elemenata.

Za potrebe ovog istraživanja osnovna metoda PW je u potpunosti implementirana u proračunski kod što je omogućilo detaljnu analizu svih njenih karakteristika. Analiza je uključivala ispitivanje konvergencije rješenja na temelju varijacije ulaznih parametara te određivanje optimalne veličine proračunske domene na slobodnoj površini.

Uočeni nedostaci postojeće PW metode nastojali su se ukloniti razvojem unaprijeđene PW metode. U cilju postizanja točnije raspodjele potencijala brzine na oplakanoj površini tijela napravljena je desingularizacija istog. Potencijal brzine podjeljen je u dva dijela: na regularni i singularni dio. Pri tome je uvedena nova funkcija kojom se opisuje ponašanje rješenja u blizini kontaktne točke i koja predstavlja singularni dio potencijala. Također, uvedena je i nova Greenova funkcija, Kelvinovog tipa, s kojom nestaje potreba za diskretizacijom slobodne površine s obzirom da novo uvedena funkcija zadovoljava dinamički rubni uvjet na slobodnoj površini.

Također, napravljena je analiza lokalnog odziva strukture uslijed udaranja o valove na primjeru jednostavne roštiljne konstrukcije broskog dna. Proračun udarnih tlakova napravljen je poboljšanom poopćenom Wagnerovom metodom koji su zatim prebačeni na strukturni model konačnih elemenata korištenjem prostorne i vremenske interpolacije. S obzirom na krutu lokalnu strukturu problem odziva riješen je na kvazistatički način zanemarivanjem inercijskih sila strukture. Opterećivanje modela napravljeno je u nizu zamrznutih vremenskih trenutaka te je proračun proveden za svaki trenutak odvojeno. Na osnovu tako dobivenih rezultata analizirana je propagacija naprezanja u vremenu te pojava značajnih reznih sila pri nailasku na diskontinuitet u strukturi.

Summary

In the context of the hydrodynamic loading and structural response of thin-walled structures, slamming type of loading makes an essential part on both the local and global level, where it can cause severe damage to the local structural elements and transient vibrations of the hull.

In order to define an adequate load calculation methods due to slamming in the preliminary design stage, as well as analysis of the local response of the structure, a direct approach in calculation of hydrodynamic loading is considered using potential flow analysis.

A comprehensive insight into the existing calculation methods is evaluated and among them the important group of so called generalized Wagner approach is explained in detail. The generalized Wagner models assume the simplification of free surface boundary conditions while the boundary condition on the wetted surface of the body remains in an original form. The velocity potential is represented by Green's third identity which is solved numerically using boundary element method.

A basic approach of generalized Wagner method is implemented in a form of programming source code to allow a detailed analysis of all its characteristics. The analysis includes solution convergence evaluation and determination of a size of the free surface domain by varying the input parameters of the model (a number and a length of the segments on the wetted part of the body and the free surface).

These imperfections in the existing PW methods are partially removed with a development of an enhanced Generalized Wagner method. In order to achieve more accurate pressure distribution on the wetted surface of the body the velocity potential is desingularized. A function of the velocity potential is divided into two separate parts: a regular and a singular one. The singular part is defined by the function which describes a behaviour of the solution close to the contact points. In order to simplify a calculation a new Green's function of Kelvin's type is introduced. Using the new approach there is no need for a discretization of the free surface because the boundary condition on that part of the domain is satisfied exactly.

Also, a local response of a stiffened panel due to slamming is analysed. As an example a part of a bottom structure of a ship is used. The calculation of the impact loads is performed using the enhanced generalized Wagner method. Then, the pressures are mapped into a structural FEM model using a spatial and temporal interpolation. Due to the rigidity of the local structure, the structural analysis is performed using quasi-static approach neglecting inertial forces. The model is loaded by static impact pressure at several time steps and the response is calculated for each of them separately. Using the FEM results the propagation of significant shear forces along the the stiffened structure is analysed.

Popis slika

Slika 2.1	Domena strujanja pri simetričnom prodiranju tijela	11
Slika 2.2	Skica von Karmanovog modela s pripadajućim vektorima brzina	13
Slika 2.3	Skica Wagnerovog modela	15
Slika 2.4	Usporedba von Karmanovog i Wagnerovog modela	17
Slika 2.5	Prikaz područja strujanja pri prodiranju tijela kroz tekućinu	18
Slika 2.6	Područje formiranja mlaza. Položaj točke zastoja	20
Slika 2.7	Prikaz prodirućeg tijela s osnovnim parametrima koji ga opisuju	21
Slika 2.8	Prikaz koordinatnih sustava (x, y) i (x', y')	22
Slika 2.9	Prikaz dvostrukog klinastog tijela i njegove slike u ravnini W	25
Slika 2.10	Skica strujanja unutar dviju krutih granica	28
Slika 2.11	Vanjsko strujanje oko lijevo orjentiranog konveksnog klina	28
Slika 2.12	Vanjsko strujanje oko desno orjentiranog konveksnog klina	29
Slika 3.1	Domena strujanja u numeričkom proračunu	33
Slika 3.2	Parametrizacija segmenta i položaj točaka P i Q u proračunskom i segmentnom koordinatnom sustavu	37
Slika 3.3	Prikaz položaja čestica s istom vertikalnom brzinom na stvarnoj (\mathcal{Y}_{sp}) i proračunskoj (\mathcal{H}) slobodnoj površini	39
Slika 3.4	Definiranje udaljenosti ΔP	40
Slika 3.5	Skica okoline kontaktne točke	41
Slika 3.6	Računanje vrijednosti D_m	42
Slika 3.7	Određivanje stvarne slobodne površine u trenutku t_{i+1}	43
Slika 3.8	Potrebni parametri za proračun tlaka u kolokacijskoj točki $Q_{(j)}$	45
Slika 3.9	Definiranje osnovnih parametara proračunske domene	47
Slika 3.10	Usporedba vrijednosti K_{op} za klin nagiba 10° i primjere grupe I	50
Slika 3.11	Usporedba vrijednosti K_{op} za klin nagiba 10° i primjere grupe II	51
Slika 3.12	Usporedba vrijednosti K_{op} za klin nagiba 40° i primjere grupe II	52
Slika 3.13	Analiza konvergencije rješenja klinastog tijela nagiba 10° za primjere grupe A	54
Slika 3.14	Analiza konvergencije rješenja klinastog tijela nagiba 40° za primjere grupe A	55
Slika 3.15	Analiza konvergencije rješenja klinastog tijela nagiba 10° za primjere grupe B	56
Slika 4.1	Parametri kojima se definira Greenova funkcija Kelvinovog tipa	57
Slika 4.2	Definiranje funkcije ponašanja rješenja (Σ) u okolini kontaktnih točaka	59
Slika 4.3	Graf funkcije $\Sigma = f(x)$ simetričnog (a) i nesimetričnog (b) tijela	59

Slika 4.4	Opći slučaj prodiranja tijela s $V_x \neq V_y \neq \omega_{\text{roll}} \neq 0$	60
Slika 4.5	Schwartz-Christoffelovo konformno preslikavanje stepenaste funkcije	61
Slika 4.6	Primjer preslikavanja domena $\mathcal{D} \rightarrow z_0 \rightarrow z' \rightarrow \mathbf{w} \rightarrow \overline{\mathcal{D}}$	62
Slika 4.7	Proračunska domena $\overline{\mathcal{D}}$	63
Slika 4.8	Položaj segmenta na oplakanoj površini i parametri kojima se opisuje	64
Slika 4.9	Parametrizacija funkcija r_L i r_R duž segmenta	66
Slika 4.10	Određivanje vremenskog koraka pri simetričnom uronu	70
Slika 4.11	Vrijednosti funkcije $r(t)$ mjerene od pozicije u kojoj se računa \mathcal{Y}_{sp}	74
Slika 4.12	Ponašanje funkcije konstante lokalnog rješenja – klin nagiba 4°	78
Slika 4.13	Ponašanje funkcije konstante lokalnog rješenja – klin nagiba 15°	79
Slika 4.14	Ponašanje funkcije konstante lokalnog rješenja – klin nagiba 30°	79
Slika 4.15	Ponašanje funkcije konstante lokalnog rješenja – klin nagiba 45°	80
Slika 4.16	Usporedba prostorne raspodjele tlaka za klin nagiba 4°	81
Slika 4.17	Usporedba prostorne raspodjele tlaka za klin nagiba 10°	82
Slika 4.18	Usporedba prostorne raspodjele tlaka za klin nagiba 30°	83
Slika 4.19	Usporedba prostorne raspodjele tlaka za klin nagiba 45°	84
Slika 4.20	Usporedba prostorne raspodjele tlaka za nesimetrične klinove početnih nagiba na obje strane od 30° (i) odnosno 40° (ii) nagnutih za $+10^\circ$	85
Slika 4.21	Prostorna distribucija tlaka na kružnom presjeku promjera $R = 4$ m pri konstantnoj brzini urona $V = 1$ m/s u trenucima $t \in \{0.335 \text{ s}, \dots, 1.407 \text{ s}\}$	86
Slika 4.22	Usporedba prostorne distribucija tlaka – kružni presjek	87
Slika 4.23	Ukupna sila na polukružni presjek koji uranja konstantnom brzinom – usporedba nekoliko metoda	88
Slika 5.1	Oblici parametarske funkcije tlak–vrijeme: (a) Lee i sur. (1998), (b) Cho i sur. (2002). Parametri: p_v - vršni tlak (amplituda), p_t - tlak traga, T_v - duljina trajanja vršnog opterećenja, T_t duljina trajanja traga.	91
Slika 5.2	Određivanje parametara udara	92
Slika 5.3	Graf funkcije deformacije u ovisnosti o FPU	96
Slika 5.4	Skica nepoklapajućih dvodimenzionalnih domena	97
Slika 5.5	Primjer poprečnih presjeka trupa pri proračunu udaranja o valove	98
Slika 5.6	Shematski prikaz prostorne raspodjele opterećenja pri prodiranju klinastog tijela u trenucima t_i , t_j i t_k	99
Slika 5.7	Shematski prikaz povijesti opterećenja pri prodiranju klinastog tijela u nepomičnim točkama A i B	100
Slika 5.8	Položaji čvorova i integracijskih točaka u osnovnoj i fizičkoj domeni	100
Slika 5.9	Skica postupka preslikavanja s hidrodinamičke na strukturnu mrežu	101
Slika 5.10	Nacrt ukrepljenog panela	102

Slika 5.11	Skica smještaja ukrepljenog panela na poprečnim presjecima klinova	103
Slika 5.12	Diskretizirani MKE model u Femapu	104
Slika 5.13	Skica modela s označenim stranicama i područjem djelovanja opterećenja	106
Slika 5.14	Prikaz područja djelovanja tlaka za prvih devet trenutaka . . .	106
Slika 5.15	Prostorna raspodjela tlaka duž koordinate s^h u trenucima t_3^s , t_6^s , t_9^s i t_{12}^s	108
Slika 5.16	Prostorno-vremenska raspodijela tlaka (klin 10°)	109
Slika 5.17	Prostorno-vremenska raspodijela tlaka (klin 15°)	109
Slika 5.18	Prostorno-vremenska raspodijela tlaka (klin 25°)	110
Slika 5.19	Prostorno-vremenska raspodijela tlaka (klin 40°)	110
Slika 5.20	Položaji čvorova modela u kojima su očitavani pomaci u smjeru z koordinate radi prikaza ovisnosti o vremenu	111
Slika 5.21	Položaji čvorova modela u kojima su očitavani pomaci u smjeru z koordinate radi prikaza prostorne raspodjele	111
Slika 5.22	Vremenska promjena apsolutnih pomaka u smjeru z koordinate na odabranim pozicijama na modelu, slika 5.20	112
Slika 5.23	Progibi modela na označenim pozicijama, slika 5.21, u vremenskim trenucima t_2 , t_5 , t_8 i t_{11}	113
Slika 5.24	Položaji elemenata modela u kojima su očitana von Mises naprezanja radi prikaza vremenske ovisnosti	114
Slika 5.25	Položaji konačnih elemenata na oplati u kojima su očitavana von Mises naprezanja radi prikaza prostorne raspodjele	114
Slika 5.26	Vremenska promjena naprezanja po teoriji von Misesa očitanim na pozicijama A1(2), B1(2), C1(2) i O1(2,3), slika 5.24	115
Slika 5.27	Promjena naprezanja po teoriji von Misesa duž ukrepljenog panela, slika 5.25	116
Slika 5.28	Položaji elemenata modela u kojima su očitana smična naprezanja	117
Slika 5.29	Vremenska promjena smičnih naprezanja po visini uzdužnog nosača na poziciji LA, slika 5.28	118
Slika 5.30	Vremenska promjena smičnih naprezanja po visini uzdužnog nosača na poziciji LB, slika 5.28	119
Slika 5.31	Vremenska promjena smičnih naprezanja po visini poprečnog nosača na poziciji T, slika 5.28	120
Slika 5.32	Vremenska promjena smičnih naprezanja po visini poprečnog nosača na poziciji S, slika 5.28	121
Slika A1	Domene bilinearnog četverokutnog elementa	126
Slika B1	Skica domene općenitog Laplaceovog rubnog problema	128

Popis tablica

Tablica 3.1	Karakteristike prodiranja klinova korištenih u određivanju veličine proračunske domene i analize konvergencije rješenja	48
Tablica 3.2	Parametri numeričkog proračuna za grupu I primjera	48
Tablica 3.3	Parametri numeričkog proračuna za grupu II primjera	48
Tablica 3.4	Usporedba duljine segmenta $(l_s)_1$ po varijantama pojedinih grupa primjera	49
Tablica 3.5	Parametri numeričkog proračuna za grupu A primjera	53
Tablica 3.6	Parametri numeričkog proračuna za grupu B primjera	53
Tablica 5.1	Vrijednosti FPU za pojedine klinove pri brzini udara $V = 9$ m/s	103
Tablica 5.2	Rubni uvjeti MKE modela (T – translacija, R – rotacija)	105
Tablica 5.3	Parametri prodiranja	105
Tablica 5.4	Vremenski trenuci t_3 , t_6 , t_9 i t_{12} pojedinih klinova	107

Popis oznaka

KRATICE

2D	dvodimenzionalan
3D	trodimenzionalan
CL	lijeva kontaktna točka
CP	kontaktna točka u općem smislu
CR	desna kontaktna točka
FPU	Faltinsenov parametar udaranja
MKE	Metoda konačnih elemenata
OP	oplakana površina
PW	Poopćena Wagnerova metoda
PPW	Poboljšana poopćena Wagnerova metoda
S–C	Schwartz–Christoffel (Schwartz–Christoffelovo preslikavanje)
SP	slobodna površina

OPĆENITO OZNAČAVANJE

a	skalarna varijabla
\vec{a}	vektor
a^h	skalarna varijabla koja se odnosi na hidrodinamički dio proračuna
a^s	skalarna varijabla koja se odnosi na strukturni dio proračuna
$d(,)$	oznaka Euklidske duljine između dvije točke

ALFABETNE OZNAKE

β	lokalni nagib tangente u nekoj točki na konturi tijela
β_L, β_R	lokalni nagibi tangente na konturi tijela u CL odnosno CR

γ_L, γ_R	eksponenti u funkcijama Σ_L odnosno Σ_R
Γ	gama funkcija
δ	debljina mlaza
δ_{ij}	Kronecker delta
Δe	vertikalna udaljenost između lijeve i desne kontaktne točke
ΔP	vertikalna udaljenost između stvarne slobodne površine i kontaktne točke
η	funkcija koja opisuje oblik proizvoljne kontaktne površine
κ	eksponent u funkciji potencijala brzine pri vanjskom strujanju oko konveksnog klina
$\bar{\kappa}$	eksponent u funkciji radijalne brzine pri vanjskom strujanju oko konveksnog klina
\varkappa	parametar u integralnoj jednadžbi čija vrijednost ovisi o položaju točke (x, y) u domeni
λ_j	bazne funkcije vektorskog prostora
ρ	gustoća tekućine
ϕ, Φ	potencijal brzine
$\tilde{\phi}$	regularni dio potencijala brzine
$\frac{\partial \phi}{\partial n}$	derivacija potencijala brzine u smjeru normale
Σ	singularni dio potencijala brzine
Σ_L	singularni dio potencijala brzine uslijed utjecaja lijeve kontaktne točke
Σ_R	singularni dio potencijala brzine uslijed utjecaja desne kontaktne točke
σ_{vm}	naprezanje prema teoriji von Misesa
τ_{xy}	smično naprezanje

LATINIČNE OZNAKE

$b(t)$	horizontalna dimenzija slobodne površine
$c(t)$	širina ravnine tlaka
c_{zz}	hidrodinamičko prigušenje

C_F	bezdimenzijski koeficijent sile
C_h	bezdimenzijski koeficijent trenutnog gaza tijela $h(t)$
C_{loc}	strukturno prigušenje
C_p	bezdimenzijski koeficijent tlaka
C_{Pa}	bezdimenzijski koeficijent tlaka prema Pravilima klasifikacijskog društva DNV pri proračunu p_s
C_y	bezdimenzijski koeficijent koordinate y
\mathcal{D}	domena strujanja tekućine
$\overline{\mathcal{D}}$	proračunska domena strujanja tekućine pri nesimetričnom uronu
$\tilde{\mathcal{D}}$	proračunska domena strujanja pri nesimetričnom uronu
e_1, e_2	vertikalna udaljenost CL odnosno CR od neporemećene slobodne površine
$G(P, Q)$	Greenova funkcija Rankinovog tipa
$G^0(P, Q)$	Greenova funkcija Kelvinovog tipa
Δe	vertikalna udaljenost lijeve i desne kontaktne točke
f_{op}	omjer duljina dva susjedna segmenata na oplakanoj površini tijela
f_p	geometrijski dio funkcije potencijala brzine pri vanjskom strujanju oko konveksnog klina
f_{rb}	geometrijski dio funkcije radijalne brzine fluida pri vanjskom strujanju oko konveksnog klina
f_s	bijektivna funkcija koja parametrizira segmentnu krivulju
f_{sp}	omjer duljina dva susjedna segmenata na slobodnoj površini tekućine
g	gravitacijsko ubrzanje
h_0	početni gaz poprečnog presjeka
$h(t)$	dubina prodiranja
\mathcal{H}	funkcija koja opisuje vertikalni položaj proračunske slobodne površine
H	dubina prodiranja ili vertikalna duljina oplakane površine tijela (vertikalna udaljenost od najniže točke tijela do najviše CP)
I	integral

\mathcal{J}	Jakobijana
k_{zz}	koeficijent koji se odnosi na povratnu silu
K_{op}	funkcija konstante lokalnog rješenja na oplakanoj površini
K_{sp}	funkcija konstante lokalnog rješenja na slobodnoj površini
\hat{K}_{sp}	modificirana funkcija konstante lokalnog rješenja na slobodnoj površini
\mathcal{L}	funkcija koja opisuje vertikalni položaj CP u odnosu na najnižu točku tijela
l_0	osnovna (nulta) duljina segmenta (rubnog elementa)
l_s	duljina segmenta (rubnog elementa)
$L_{\mathcal{S}}$	duljina jednog dijela ruba proračunske domene
\vec{n}, n	vektor normale na neku površinu
m_{zz}	dodana masa
N_{op}	broj segmenata na oplakanoj površini tijela
N_{sp}	broj segmenata na proračunskoj slobodnoj površini
$N_i(\xi, \eta)$	funkcija oblika bilinearnog elementa
\mathbf{p}	točka u domeni strujanja tekućine
p	tlak
p_{ext}	tlak u vanjskom području strujanja
p_{int}	tlak u unutarnjem području strujanja
p_s	projektni tlak uslijed udaranja prema Pravilima klasifikacijskog društva
p_{VoK}	tlak na oplakani dio tijela prema von Karmanovom modelu
p_{Wag}	tlak na oplakani dio tijela prema Wagnerovom modelu
r_{CP}	udaljenost točke domene od kontaktne točke
r_L	udaljenost točke domene od lijeve kontaktne točke
r_R	udaljenost točke domene od desne kontaktne točke
\mathcal{S}	rub domene strujanja tekućine
\mathcal{S}_{op}	oplakana površina tijela

\mathcal{S}_{sp}	slobodna površina tekućine
$\bar{\mathcal{S}}$	rub proračunske domene strujanja tekućine pri nesimetričnom uronu
$\bar{\mathcal{S}}_{\text{op}}$	oplakana površina tijela pri nesimetričnom uronu
$\bar{\mathcal{S}}_{\text{sp}}$	slobodna površina tekućine pri nesimetričnom uronu
\vec{t}	vektor tangente na neku površinu
T_n	Čebiševljev polinom prve vrste n -tog stupnja
\vec{v}, v	vektor brzine strujanja fluida
v_r	radijalna brzina strujanja fluida
V	brzina prodiranja tijela kroz tekućinu
V_x, V_y	horizontalna odnosno vertikalna komponenta brzine prodiranja tijela kroz tekućinu
\tilde{V}	bezdimenzijska brzina prodiranja tijela kroz tekućinu
$w(z)$	kompleksni potencijal
w_s	faktor oplakivanja
y_t	funkcija koja opisuje oblik površine tijela u početnom trenutku t_0
\mathcal{Y}_{op}	funkcija koja opisuje oblik oplakane površine tijela
\mathcal{Y}_{sp}	funkcija koja opisuje stvarnu slobodnu površinu
\mathcal{Y}_{w}	funkcija koja opisuje slobodnu površinu vala

KOORDINATNI SUSTAVI

(x, y)	Kartezijev koordinatni sustav; označava i koordinate točke P na rubu domene strujanja
(ξ, η)	Kartezijev koordinatni sustav; označava i koordinate točke Q na rubu domene strujanja

1. Uvod

1.1. Opis problema i motivacija za istraživanje

Udaranje broda u valove je nelinearni fenomen impulsnog karaktera. Ovisno o intenzitetu udara, amplituda i duljina trajanja impulsa mogu značajno varirati. Metoda proračuna strukturnog odziva ovisi o odnosu duljine trajanja impulsa i prirodnog perioda strukture. U slučajevima kada je duljina trajanja impulsa značajno duža od vlastitog perioda strukture problem se može formulirati na kvazi-statički način i jedino je amplituda opterećenja bitna. U protivnom, ukoliko je trajanje impulsa istog reda kao i vlastiti period strukture onda su bitni i duljina trajanja i amplituda te se problem mora rješavati potpuno spregnuto [1].

Zbog brojnih fenomena koji se javljaju pri udaranju postoje teškoće pri definiranju adekvatnih fizikalnih, odnosno matematičkih modela [2], [3]. Nelinearni efekti u interakciji fluida i strukture posljedica su velikih brzina udara. Fenomeni koji se pritom javljaju, u većoj ili manjoj mjeri, su mlazovi i pjena, lomeći valovi, neviskozno odvajanje strujanja, šupljine zraka blizu površine tijela, kavitacija, stlačivost zraka, itd. [1].

Slučajni karakter proizlazi iz činjenice da se udaranje najčešće javlja u ekstremnim okolišnim uvjetima na uzburkanom moru kojeg karakterizira stohastična priroda valova kao osnovnih uzročnika udaranja [4]. Veličina i vrijeme trajanja tlačnog opterećenja za pojedini događaj ovisi o brzini udara fluida, geometriji i elastičnosti strukture, obliku nailaznog vala, količini zarobljenog zraka u šupljinama te ostalim ranije opisanim nelinearnim efektima.

Pri impulsnom udaru važno je poznavati i funkcijsku ovisnost generiranog tlaka o vremenu koja definira oblik impulsa. Kod svih impulsnih opterećenja, a naročito kod udaranja, tlak najprije u kratkom vremenskom periodu postiže maksimum u obliku vrlo oštrog vrška (eng. peak) nakon čega slijedi duži period nižeg tlaka koji se naziva trag (eng. tail).

Za veliku većinu opaženih pojava udaranja maksimalni tlak koji se postiže u tragu mnogo je niži od maksimalnog tlaka u vršku. Stoga se smatra da trag ima malen utjecaj na veličinu eventualnog oštećenja strukture uslijed udara. Ovu tvrdnju potvrđuju brojna eksperimentalna istraživanja i numerički proračuni prema kojima najveći utjecaj na pojavu oštećenja opterećenih dijelova strukture imaju amplituda tlaka u vršku (eng. peak pressure) i duljina njegova trajanja (eng. peak width).

Većina dosadašnjih istraživanja koncentrirala se na što točnije određivanje maksimalnih vrijednosti tlakova, dok su ona vezana za određivanje duljine trajanja vršaka zastupljena u puno manjoj mjeri. Činjenica je da je vrlo teško mjeriti točno trajanje vršaka iz funkcijske ovisnosti tlaka i vremena dobivene različitim eksperimentalnim ili teoretskim istraživanjima. Stoga se nameće potreba za daljnjim istraživanjima u tom smjeru kako bi se dobila teorijska osnova za predviđanje duljine trajanja vršaka uslijed udaranja. To je posebno važno pri definiranju ekvivalentnih dinamičkih amplituda tlakova kod proračuna podobnosti izložene strukture.

Tlakovi koji se generiraju na izloženoj strukturi uslijed udaranja utječu na njezin odziv na lokalnoj i globalnoj razini. Na lokalnoj razini radi se o djelovanju lokalnog tlaka u području interakcije s fluidom, dok na globalnoj razini ti tlakovi uzrokuju globalne vibracije strukture (podrhtavanje) i značajnu promjenu ukupnog momenta savijanja, smičnih i normalnih sila u trupu broda.

Kod proračuna odziva na lokalnoj razini važno je što preciznije odrediti projektna opterećenja (tlakove uslijed udara) pri čemu treba s dovoljnom točnošću predvidjeti relativna gibanja između strukture i slobodne površine fluida uzimajući u obzir nailazne valove i gibanje broda.

Analiza na globalnoj razini podrazumijeva određivanje oscilatornih vrijednosti momenata savijanja i sila koje nastaju uslijed impulsnog udara, ali isto tako i lokalnih efekata uzrokovanih cikličkim promjenama tlakova kod proračuna zamora na globalnoj razini. Pri tome treba računati i na prolazni dinamički karakter odziva koji može imati značajnog utjecaja na sveukupno ponašanje strukture.

Kod evaluacije lokalnog odziva strukture pri udaranju, osim projektnog tlaka, potrebno je poznavati i njenu krutost. Kada je trajanje udarnog opterećenja istog reda veličine kao i prirodni period vibriranja izložene lokalne strukture potrebno je u obzir uzeti hidroelastične efekte zbog postojanja snažne interakcije s fluidom. U slučaju da je trajanje udara znatno dulje od prirodnog perioda strukture, elastičnost lokalne strukture ne igra značajniju ulogu te se ista može smatrati potpuno krutom.

S obzirom na opisanu kompleksnost problema nameće se potreba za spregom hidrodinamičkog i strukturnog modela pri čemu bi se dobili točniji i pouzdaniji rezultati odziva strukture. U rješavanju spregnutih problema postoje dva pristupa od kojih se primjenjuje onaj koji najbolje odgovara problemu. Razlikuju se [5]:

- (a) monolitni – jednadžbe diskretiziranih polja fluida i strukture rješavaju se unutar jednog te istog rješavača
- (b) razdijeljeni – domene su strogo odijeljene te se jednadžbe diskretiziranog problema rješavaju za svako polje zasebno

Monolitni pristup zahtjeva potpuno integriranje hidrodinamičkog i strukturnog polja koji često podrazumijeva implementaciju potpuno novog rješavača što kod fizikalno ili geometrijski složenih modela to može postati zahtjevan zadatak. Razdijeljeni pristup omogućava korištenje već postojećih implementacija koje zasebno rješavaju strukturni i hidrodinamički dio što daje određenu praktičnu prednost. Međutim, u tom slučaju javlja se problem prijenosa informacija iz jednog modela u drugi zbog različitih mreža na strukturi i fluidu koje se najčešće ne poklapaju na granicama domene [6].

Na temelju prethodnih razmatranja može se sagledati kompleksnost problema udaranja, a shodno tome i teškoće pri definiranju adekvatnih fizikalnih i matematičkih modela čija točnost se može provjeriti jedino odgovarajućim modelskim ispitivanjima u bazenu. Od svih postojećih najviše potencijala, što se tiče hidrodinamičkog dijela problema, pokazuju modeli temeljeni na metodama računalne dinamike fluida (eng. CFD – Computational Fluid Dynamics) kao što su RANS modeli (eng. Reynolds Averages Navier-Stokes) s obzirom da se njima potencijalno mogu opisati svi fenomeni svojstveni udaranju. Pri tome treba naglasiti da je potrebno napraviti

temeljitiije vrednovanje takvog pristupa kako bi producirani rezultati bili pouzdaniji za primjenu u svakodnevnoj praksi [1]. Glavni nedostaci tih metoda su razni problemi konvergencije, zatim numeričko opisivanje slobodne površine te skupoća u pogledu procesorskog vremena rješavanja što onemogućava njihovo efikasno korištenje pri analizi vrlo velikog broja modela koje je potrebno napraviti u preliminarnoj fazi projektiranja.

Nameće se stoga potreba za razvojem alternativnih metoda koje bi bile procesorski jeftnije i koje bi problem rješavale s dovoljnom točnošću za preliminarnu fazu. Alternativne metode mogu se koristiti i u detaljnoj fazi projektiranja pri analizi odziva uslijed udaranja na razini detalja strukture. Tada je potrebno napraviti vrlo veliki broj simulacija kako bi se odredila kritična udaranja koja uzrokuju značajna opterećenja. Kritične pojave udaranja potom se mogu detaljnije analizirati upotrebom RANS metoda.

1.2. Pregled dosadašnjih istraživanja

U proteklih dvadesetak godina primjetno je značajno povećanje broja istraživanja na području impulsnih opterećenja plovnih objekata uključujući eksperimentalne, analitičke i numeričke pristupe. Jedan od razloga svakako je značajno povećanje dimenzija i brzine plovnih objekata te prijevoz sve većih količina roba čija posljedica je izraženi pramčani izboj (eng. flare) i krmeni prevjes (brodovi za prijevoz kontejnera, odnosno automobila) što utječe na veću vjerojatnost pojave udaranja. Kod analize udaranja istraživanja se mogu grubo podijeliti na ona lokalnog i globalnog karaktera čiji ciljevi su ukratko obrazloženi u prethodnom poglavlju.

Dobar pregled problema udaranja dao je Korobkin [3] koji je opisao udar krutog i elastičnog tijela, akustične efekte i efekte zarobljenog zraka te izranjanje tijela. Također, Mizoguchi i Tanizawa [7] opisali su različite determinističke i stohastičke pristupe koji se koriste kod analize efekata zarobljenog zraka, problema stlačivosti fluida i problema elastične strukture. Faltinsen i sur. [2] prikazali su sva relevantna dotadašnja istraživanja različitih tipova udaranja kod svih vrsta plovnih objekata s popisom problema koje će trebati u skoro vrijeme rješavati. U ovom dijelu dat će se kratak pregled trenutnog stanja razvoja područja s naglaskom na metode primjerene za preliminarnu fazu projektiranja. To uključuje analitičke i numeričke metode za 2D tijela, eksperimentalna ispitivanja 2D i 3D modela te spregnute metode za realne plovne objekte na lokalnoj i globalnoj razini.

Analitički modeli [8] osnivaju se na pretpostavkama krutog tijela koji u početnom trenutku dodirne slobodnu površinu i onda prodire konstantnom brzinom. Pri tome se zanemaruje niz efekata kao što su površinska napetost, gravitacija, prisutnost zraka i viskoznost fluida koji pri određenim uvjetima udara (brzine prodiranja, oblika tijela, omjera dimenzija tijela i elevacije slobodne površine) imaju malen utjecaj [9]. Za tijelo se pretpostavlja da je u obliku klina ili tupo s malim kutom nagiba (eng. deadrise angle) koji se definira kao kut između tangente na površinu tijela i neporemećene slobodne površine fluida. S obzirom da se zanemaruje viskoznost i da nema vrtloženja, strujanje je potencijalno što vodi do linearne jednadžbe polja. Premda se ovi modeli temelje na strogoj matematičkoj formulaciji njihova primjena

je jednostavna te daju rezultate prihvatljive točnosti unatoč uvođenju brojnih pojednostavljenja.

Prvi takav model za dvodimenzionalni problem dao je von Karman [10] u kojemu je zanemarena gravitacija i elevacija slobodne površine pri udaru, a za izračun tlaka tijelo je aproksimirano ravnom pločom. Wagner [11] je unaprijedio von Karmanov model uzimajući u obzir elevaciju slobodne površine, a problem je opisao pomoću potencijalnog opstrujavanja ekspandirajuće ravne ploče na čijem rubu je singularitet koji se rješava preko neprekinutosti rubnog dijela fluida za bilo koji vremenski trenutak duž kontaktne linije ili točke (Wagnerov uvjet). Rubni uvjeti, postavljeni na slobodnoj površini fluida u početnom trenutku, kao i Cauchy-Lagrangeov integral (Bernoullijeva jednadžba) su linearni. Premda ovakav pojednostavljeni model definiraju linearne jednadžbe polja i rubni uvjeti, problem nije linearan iz razloga što kontaktne točke (u 2D slučaju), odnosno kontaktna linija (u 3D slučaju) između slobodne površine i tijela nisu unaprijed poznate te se moraju odrediti zajedno s rješenjem [8].

Wagnerovom metodom dobivaju se znatno točnije vrijednosti tlakova u odnosu na von Karmanov postupak te ista predstavlja matematičku osnovu za sve kasnije analitičke metode. Wagnerovo rješenje, uzimajući u obzir nelinearne efekte preko nelinearnih rubnih uvjeta, nadogradili su najprije Watanabe [12], a zatim Cointe i Armand [13] te Howison i sur. [14] koji su djelomično riješili problem singulariteta usklađivanjem rješenja vanjske i unutarnje domene strujanja u korijenu mlaza pomoću asimptotskog razvoja. Potpuno formalno rješenje Wagnerovog uvjeta dao je Oliver [15] u svojoj dizertaciji. Također, treba spomenuti da je Faltinsen [16] predložio rješenje pomoću asimptotskog razvoja za klinasto tijelo bilo kojeg kuta nagiba.

Potpuno opisivanje strujanja uslijed udara tijela s proizvoljnim kutom nagiba te dobivanje raspodjele tlakova duž oplakane površine moguće je jedino numeričkim pristupom. Glavna poteškoća koja se tu javlja je pravilno opisivanje strujanja u području kontakta uronjenog dijela tijela i slobodne površine fluida [3]. U numeričke modele može se uključiti i gravitacija koja se u nekim slučajevima ne bi smjela zanemariti kao npr. kod kasnije faze prodiranja tijela kada može bitno utjecati na strujanje. Prvi pokušaj korektnog opisivanja strujanja u kontaktnom području napravio je Hughes [17]. Greenhow [18] je istraživao prodiranje klinastog tijela s nelinearnim rubnim uvjetima na slobodnoj površini koristeći Vinjeovu i Brevigovu [19] metodu rubnih elemenata (eng. Boundary Elements Method – BEM) za rješavanje potpuno nelinearnih problema sa slobodnom površinom s uključenom gravitacijom. Usporedbom s metodama sličnosti [20] dobivena su rješenja zadovoljavajuće točnosti samo za klinove s kutovima nagiba većim od 60° zbog problema s opisivanjem strujanja u mlazu.

Ipak, da bi se dobili korektni tlakovi nije potreban precizan model strujanja u mlazu. Čestice fluida u mlazu gibaju se pod utjecajem inercijalnih sila zbog čega strujanje mlaza vrlo malo utječe na strujanja u ostalim dijelovima domene. Zbog toga je modelom koji su predložili Zhao i Faltinsen [21] zanemaren utjecaj mlaza te je on isključen iz domene. S obzirom da u mlazu vlada atmosferski tlak, na poziciji gdje on nastaje uveden je dodatni rubni uvjet kojim se definira jednakost tlaka. Problem se rješava metodom rubnih elemenata uz nelinearni Cauchy-Lagrangeov integral s

egzaktan opisanim oblikom tijela i slobodnom površinom definiranom nelinearnim rubnim uvjetom. Kao takav model je primjenjiv za tupa 2D tijela proizvoljnog oblika koja prodiru u tekućinu proizvoljnom brzinom. Zhao i sur. [22] proširili su postojeći model uzimajući u obzir odvajanje strujanja uslijed promjene geometrije (npr. prisustva zgiba).

U istom radu predložen je i pojednostavljeni model udara tijela u kojem su samo na slobodnoj površini fluida rubni uvjeti linearizirani, dok je sve ostalo jednako kao i kod potpuno nelinearnog modela [21]. Ovakav pristup poznat je u literaturi pod nazivom poopćena Wagnerova metoda. Slobodna površina aproksimira se ravnom linijom na koordinati pozicije gdje nastaje mlaz. Rješenje se dobiva za svaki vremenski korak metodom rubnih elemenata (BEM). Distribucija vertikalne brzine na slobodnoj površini dobiva se numeričkom integracijom i kao takva koristi se za određivanje vertikalne pozicije slobodne površine i mlaza u sljedećem vremenskom koraku. Zbog postojanja singulariteta u dodirnim točkama mogu se pojaviti negativne vrijednosti tlaka pri računanju nelinearnog Cauchy-Lagrangeovog integrala. Ovom metodom negativni tlakovi se zanemaruju pa se integracija hidrodinamičkog tlaka vrši samo duž površine s pozitivnim vrijednostima. Dobiveni rezultati vrlo dobro se slažu s eksperimentalnim [23] i s ranije predloženim numeričkim rješenjima poput potpuno nelinearnog modela [21] u odnosu na koji daje gotovo identične vrijednosti tlaka za kutove nagiba do 20° , dok su za ostale kutove te vrijednosti nešto konzervativnije [8].

Drugačiji pristup predložio je Vorus [24] koji je zanemario geometrijske nelinearnosti aproksimirajući tijelo ravnom pločom, ali je uzeo u obzir nelinearne rubne uvjete na slobodnoj površini koje je postavio na njenu početnu razinu. Raspodjela tlakova dobiva se pomoću nelinearnog Cauchy-Lagrangeova integrala. Modelom se naglašava veća važnost nelinearnog opisa slobodne površine u odnosu na egzaktni opis geometrije tijela [8] što se pokazalo prikladnim za probleme u kojima je bitno dobro opisati područje strujanja oko kontaktnih točaka. Svim ovim modelima zajedničko je korištenje nelinearnog Cauchy-Lagrangeovog integrala pri izračunu hidrodinamičkog tlaka, dok se nelinearnosti u rubovima domene kod nekih uzimaju u obzir, a kod nekih se zanemaruju [8].

Model koji je predložio Logvinovich [25] polazi od pretpostavke da rubovi domene nisu toliko dominantni u opisivanju problema udara pa se mogu isključiti iz formulacije bez značajnijeg gubitka točnosti pri čemu se tlakovi računaju pomoću nelinearnog Cauchy-Lagrangeovog integrala.

Pri istraživanju karakteristika udarnog opterećenja najpouzdaniji rezultati dobivaju se eksperimentalnim modelskim ispitivanjima ili ispitivanjima u naravi, premda je ovakav pristup i najskuplji [1]. Postoje dvije vrste eksperimentalnih ispitivanja: mjerenja na 2D ili 3D modelima koji udaraju na mirnu površinu fluida slobodnim padom ili nekom kontroliranom brzinom i ispitivanja krutih ili elastičnih modela u bazenima na pravilnim ili nepravilnim valovima s različitim smjerovima nailaska. Ispitivanjima u naravi nastoje se dobiti informacije o lokalnim tlakovima, odzivu lokalne strukture i globalnom odzivu u preostalom dijelu trupa.

Prva značajnija ispitivanja proveli su Ochi [26] i Chuang [27] koja se ističu svojom složenošću i originalnošću. Tim eksperimentima utvrđena je, a u brojnim kasnijim istraživanjima i potvrđena, funkcijska ovisnost tlaka i brzine udara koja pokazuje

da je tlak jednak umnošku kvadrata brzine i neke konstante k . Pri tome konstanta k varira i ovisi o različitim faktorima kao što su paramateri eksperimenta, lokalni kut nagiba u trenutku udara, utjecaj trodimenzionalnih efekata, itd. Vrijednosti konstante k mogu se prikazati u obliku dijagrama u ovisnosti o jednostavnim varijablama kao što su dubina urona i lokalna širina razmatranog poprečnog presjeka i kao takve koristi za izračun projektnih tlakova [28].

Vrlo važne eksperimente proveli su Greenhow i Lin [29] ispitivanjem oblika poremećene slobodne površine nakon udara za niz dvodimenzionalnih tijela pri čemu su posebnu pozornost posvetili točkama kontakta tijela i slobodne površine fluida u kojima se prema analitičkim teorijama javljaju singulariteti te u kojima u realnom strujanju dolazi do formiranja mlaza. Osim što su dala neke odgovore za jednostavna tijela, ova ispitivanja poslužila su kasnije razrađenim modelima [18], [21], [22] u verifikaciji oblika slobodne površine i pojave odvajanja strujanja na površini tijela te su pokazala opravdanost zanemarivanja utjecaja gravitacije pri prodiranju nakon udara.

U zadnjih nekoliko godina primjetan je porast različitih eksperimentalnih istraživanja u skladu s rastućim potrebama boljeg razumijevanja složenih karakteristika udarnih opterećenja među kojima se mogu istaknuti Yang i sur. [30] ispitivanja krmernih presjeka modernih kontejnerskih brodova slobodnim padom u cilju dobivanja prostorne i vremenske distribucije udarnih tlakova te Peseux i sur. [31] ispitivanja niza krutih i elastičnih stožastih tijela različitih debljina i kutova nagiba u cilju dobivanja prostorne distribucije i evolucije udarnih tlakova. U posljednje vrijeme primjetna je sve veća zastupljenost spregnutih metoda u projektiranju kao alternativa dotadašnjoj praksi računanja udarnih tlakova pomoću tzv. k -faktor metoda [32] zasnovanih na ranijim eksperimentalnim istraživanjima [26], [27].

Tome je značajno pripomogao snažan razvoj analitičkih i poluanalitičkih numeričkih metoda kao i povećanje procesorske moći računala na kojima se efikasnije mogu provoditi hidrodinamički proračuni metodama računalne dinamike fluida. Među spregnutim pristupima razvijenim u posljednjim istraživanjima ističu se metode Hermundstada i Moana [33] te Schellina i el Moctara [34], [35].

Hermundstad i Moan prikazali su proračun opterećenja uslijed udaranja na pravilnim [36] i nepravilnim [37] valovima na razvijenom stanju mora pri čemu su za izračun relativnih gibanja (vertikalne brzine i brzine uslijed ljuľljanja) između trupa i slobodne površine upotrijebili nelinearnu vrpčastu metodu. Dobivena vertikalna gibanja potom su korištena kao ulazni parametri za proračun udarnih tlakova pojednostavljenom metodom Zhaoa i dr. [22] koja je kod proračuna na nepravilnim valovima prilagođena podjelom na dva odvojena dijela kako bi se povećala efikasnost računanja. U prvom dijelu potencijali brzine računaju se za niz jediničnih relativnih brzina i dubina urona, a zatim se u drugom dijelu koriste za proračun tlakova pri stvarnim brzinama udara na bilo kojem stanju mora.

S obzirom da model tijekom simulacije nepravilnog stanja mora susreće mnoštvo valova potrebno je identificirati značajne pojave udaranja pa je u tu svrhu razvijena jednostavna metoda [33] kojom se računaju lokalni vršni tlakovi prema Wagneru [11] pri čemu je kao kriterij postavljena neka granična vrijednost tlaka. Opisana metoda provjerena je usporedbom dobivenih rezultata s rezultatima ispitivanjima u bazenu na modelima broda za prijevoz automobila [37], Ro-Ro broda pri brzini na-

predovanja od 20 čv, broda za kružna putovanja pri malim brzinama i FPSO broda za brzinu nula [33]. Također, provjerena su naprezanja koja uzrokuju opterećenja uslijed udaranja prebacivanjem izračunatih tlakova na kvazistatički 3D model strukturnog dijela brodskog dna u obliku klina s vrlo finom mrežom konačnih elemenata [33].

Metoda koju se predložili Schellin i el Moctar [34] također je hibridnog tipa te koristi tri različita pristupa kod računanja relativnih gibanja, odnosno opterećenja uslijed udaranja. U prvom koraku računa se odziv na pravilnim jediničnim valovima upotrebom linearne panelne metode uz pomoć Greenove funkcije za niz valnih frekvencija i za sve kutove nailaska. U sljedećem koraku odabiru se regularni projektni valovi koji uzrokuju maksimalne vrijednosti relativnih ubrzanja između lokalnih dijelova strukture i slobodne površine te se zatim pomoću nelinearne vrpčaste metode određuju gibanja broda u uvjetima odabranih projektnih valova uzimajući u obzir brzinu napredovanja. U zadnjem koraku računaju se udarni tlakovi korištenjem RANS metode pri čemu se kao ulazni parametri uzimaju gibanja broda dobivena u prethodnom koraku. Metoda je provjerena usporedbom dobivenih rezultata s rezultatima modelskog ispitivanja kontejnerskog broda u bazenu [38].

1.3. Cilj i hipoteze istraživanja

Cilj istraživanja je unapređenje postojeće metode izračuna i razvoj postupka preslikavanja tlaka na lokalnu konstrukciju pri proračunu odziva broda uslijed udaranja o valove u preliminarnoj fazi projektiranja te analiza pojave značajnih smičnih sila uslijed diskontinuiteta u ukrepljenju na lokalnoj razini.

Hipoteze istraživanja:

- (i) Postojeću poopćenu Wagnerovu metodu za proračun hidrodinamičkog tlaka pri prodiranju krutog tijela kroz tekućinu moguće je unaprijediti uključivanjem dinamičkog rubnog uvjeta na proračunskoj slobodnoj površini u cilju dobivanja točnijih i pouzdanijih rezultata;
- (ii) Metodu određivanja trenutne oplakane površine moguće je unaprijediti u svrhu izbjegavanja prevelikih numeričkih oscilacija udarnog tlaka.

1.4. Metodologija istraživanja i struktura rada

Svaku od prethodno spomenutih metoda za proračun opterećenja uslijed udaranja broda o valove karakterizira niz prednosti i nedostataka koji određuju njihovu primjenu ovisno o specifičnostima i zahtjevima razmatranog problema u koje se ubrajaju razina točnosti rezultata, vrijeme trajanja proračuna, praktičnost primjene i prihvaćenost od strane relevantne regulative (klasifikacijskih društava). Uspoređujući prednosti i nedostatke svake od nabrojanih metoda može se zaključiti da korištenje poopćene Wagnerove metode predstavlja optimalni izbor u preliminarnoj fazi projektiranja. Stoga je spomenuta metoda odabrana za polaznu točku u istraživanju opisanog problema. Istraživanje problema se odvijalo u nekoliko faza koje su ovdje ukratko opisane.

U pripremnoj fazi istraživanja temeljito su analizirane različite metode proračuna tlakova uslijed udaranja o valove. Naglasak je stavljen na metode temeljene na potencijalnom modelu strujanja pri čemu su se razmotrili svi aspekti proračuna od uvedenih pretpostavki, matematičke formulacije, načina rješavanja (analitički ili numerički) te specifičnih problema kao što su određivanje oplakane površine tijela u svakom vremenskom trenutku i načina računanja tlakova iz dobivene raspodjele potencijala brzine (kod numeričkih metoda). Nedostaci koji su uočeni postali su temelj za definiranje poboljšanih formulacija u sklopu novo razvijenog teorijskog modela.

U idućoj fazi istraživanja implementirana je poopćena Wagnerova metoda [22] za proračun hidrodinamičkog tlaka pri prodiranju kriške beskonačno dugog krutog tijela kroz tekućinu [8], [9] i [21]. Implementacija je napravljena u programskom jeziku Fortran korištenjem prevoditelja Intel Fortran Composer XE na Linux operativnom sustavu. Verifikacija i validacija je provedena uspoređivanjem izračunatog hidrodinamičkog tlaka s relevantnim numeričkim i analitičkim proračunima. Verifikacija je provedena za nekoliko različitih primjera usporedbom rezultata implementirane metode s rezultatima verificiranog računalnog programa CRSLAM u kojem se koristi ista metoda te se upotrebljava u nekoliko klasifikacijskih društava (Det Norske Veritas, Bureau Veritas). Dobiveni rezultati uspoređeni su s analitičkim rješenjima Cointea [13] i Faltinsena [21] za nekoliko klinastih presjeka s različitim kutom nagiba u odnosu na neporemećenu slobodnu površinu tekućine. Na ovaj način dobivena je pouzdana programska baza za daljnju analizu implementirane metode koja je provedena u sljedećoj fazi istraživanja.

U trećoj fazi istraživanja provedena je detaljna analiza implementirane poopćene Wagnerove metode. U sklopu ove faze ispitana je konvergencija rješenja na skupini primjera varijacijom ulaznih parametara koji imaju utjecaja na rješenje (veličina slobodne površine, te broj i gustoća segmenata na slobodnoj i oplakanoj površini). Kao kriterij usporedbe poslužila je funkcija konstante lokalnog rješenja za potencijal brzine na oplakanoj površini tijela. Za referentnu metodu usporedbe uzet je analitički model poopćene Wagnerove metode zasnovan na konformnom preslikavanju koji su razvili Mei, Liu i Yue (1999) [39].

U četvrtoj fazi istraživanja, objedinjavanjem svih relevantnih znanja iz područja [40] kao i uočenih nedostataka osnovne PW metode, razvila se nova teorijska osnova unaprijeđene PW metode. Osnova novog teorijskog pristupa je Greenova funkcija Kelvinovog tipa koja je uvedena kako bi se izbjegla potreba za definiranjem veličine slobodne površine. Naime, novi tip Greenove funkcije zadovoljava dinamički rubni uvjet na slobodnoj površini čime se u numeričkom proračuna izostavlja diskretizacija slobodne površine te se ista provodi samo na oplakanom dijelu tijela. Isto tako, potencijal brzine na oplakanoj površini definira se na novi način i to kao umnožak regularnog dijela potencijala te novo uvedene funkcije kojom se opisuje ponašanje rješenja u okolini kontaktnih točaka. Uvedena funkcija predstavlja singularni dio potencijala brzine te je definirana na osnovi lokalnog rješenja u blizini kontaktnih točaka. Time su postignuti točniji iznosi potencijala na oplakanoj površini tijela kao i njegovo realnije ponašanje u području kontaktne točke. Nakon implementacije provedeno je temeljito ispitivanje novo razvijenog algoritma u smislu ispunjava li metoda inicijalno definirane pretpostavke i rubne uvjete matematičkog modela te

da li je u skladu s fizikalnim karakteristikama problema.

U petoj fazi istraživanja razmatrala se primjena razvijene metodologije iz ranijih faza u analizi strukturnog odziva na lokalnoj razini pri čemu je naglasak na određivanju utjecaja udarnog opterećenja na propagaciju smičnih sila i naprezanja kroz tankostijenu konstrukciju. Analiza je provedena na primjeru roštiljne konstrukcije broskog dna pri čemu se posebna pažnja posvetila što točnijem prijenosu tlakova dobivenih metodom razvijenom u prethodnoj fazi istraživanja. Izračunati tlakovi prenijeti su na MKE model interpolacijom s hidrodinamičke na strukturnu mrežu uzimanjem u obzir prostorne i vremenske distribucije. Kako je lokalna struktura dovoljno kruta odziv je modeliran na kvazistatički način. U takvom pristupu interpolacija tlaka provodi se za niz zamrznutih vremenskih trenutaka koji se zasebno analiziraju. U konačnici provedena je analiza propagacije naprezanja u vremenu te pojava reznih sila pri nailasku na diskontinuitet u ukrepljenju elemenata oplata (jaki nosač ili pregrada).

Doktorski rad je izložen kroz šest poglavlja. U prvom poglavlju napravljen je kratak opis problema te postavljena hipoteza doktorskog rada. Pregledom stručne literature iznesene su dosadašnje spoznaje te je ukratko opisana metodologija istraživanja.

U drugom poglavlju postavljena je formulacija osnovnog problema prodiranja krutog tijela kroz tekućinu. Opisani su osnovni pristupi pri proračunu opterećenja uslijed udaranja o valove.

U trećem poglavlju detaljno je opisana osnovna poopćena Wagnerova metoda koja se zasniva na numeričkom rješavanju problema prodiranja korištenjem metode rubnih elemenata. Na kraju je, na primjeru tijela klinastog poprečnog presjeka, napravljena analiza konvergencije rješenja u ovisnosti o parametrima proračunske domene te utvrđena optimalna veličina domene na slobodnoj površini.

U četvrtom poglavlju detaljno je objašnjena teorijska osnova poboljšane poopćene Wagnerove metode proračuna hidrodinamičkih tlakova uslijed prodiranja krutog tijela kroz tekućinu. Prikazan je novi oblik Greenove funkcije te novi način opisivanja potencijala brzine uzimanjem u obzir lokalnog rješenja u okolini kontaktne točke. Na kraju je dana usporedba poboljšanog pristupa u odnosu na osnovnu metodu.

U petom poglavlju prikazan je postupak proračuna lokalnog odziva strukture uslijed udaranja o valove. Kao primjer uzeta je roštiljna konstrukcija dna na pramčanom dijelu broda. Opisan je način prijenosa izračunatih tlakova s hidrodinamičke na strukturnu mrežu konačnih elemenata. Na samome kraju provedena je analiza propagacije naprezanja u vremenu na dijelu strukture izloženom udaru te pojava reznih sila u jakim nosačima.

U šestom poglavlju iznesena su zaključna razmatranja doktorskog rada i dane upute za daljnja istraživanja.

2. Problemi prodiranja tijela kroz tekućinu

2.1. Formulacija problema

Problem prodiranja tijela kroz tekućinu (fluid) formulirat će se na primjeru prodiranja dvodimenzionalnog, strogo konveksnog, glatkog i simetričnog tijela. Uz spomenute pretpostavke smatra se da tijelo kroz fluid prodire konstantnom brzinom V i uz početno neporemećenu slobodnu površinu (Slika ??). Također, fluid se smatra idealnim (neviskoznim i bezvrtložnim) te nestlačivim. U početnom trenutku udara ($t_0 = 0$) tijelo dodiruje slobodnu površinu fluida u jednoj točki u koju se smješta ishodište globalnog koordinatnog sustava. Ako je $h(t)$ dubina prodiranja tijela onda se geometrija oplakane površine može opisati funkcijom \mathcal{Y}_{op} na sljedeći način:

$$\mathcal{Y}_{\text{op}}(x, t) = y_t(x) - h(t) \quad (2.1)$$

gdje je $\mathcal{Y}_{\text{op}}(x, t)$ trenutni vertikalni položaj oplakane površine, $y_t(x)$ funkcija koja opisuje oblik površine tijela u globalnom koordinatnom sustavu u početnom trenutku t_0 , $h(t) = Vt$ dubina urona koja je unaprijed poznata, V brzina prodiranja koja se pretpostavlja da je konstantna, x prostorna, a t vremenska varijabla.

Položaj slobodne površine nakon udara tijela opisuje se funkcijom $\mathcal{Y}_{\text{sp}}(x, t)$. S obzirom da se radi o simetričnom udaru za funkcije slobodne površine i oblika površine tijela vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{\text{sp}}(-x, t) &= \mathcal{Y}_{\text{sp}}(x, t) \\ y_t(-x) &= y_t(x) \end{aligned}$$

U početnom trenutku strujanje fluida je bezvrtložno pa prema Kelvinovom teoremu o očuvanju cirkulacije ono to ostaje i dalje jer se u sustavu pojavljuje samo polje konzervativnih sila. U tom slučaju postoji potencijal brzine $\phi(x, y, t)$ te vrijedi:

$$\vec{v} = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} \quad (2.2)$$

Zakon očuvanja mase glasi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

S obzirom da je fluid nestlačiv, vrijedi:

$$\rho = \text{konst.} \quad (2.4)$$

pa jednačba očuvanja mase poprima sljedeći oblik:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (2.5)$$

Uvrštavanjem (2.2) u (2.5) dobiva se Laplaceova jednadžba:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.6)$$

Kinematički rubni uvjeti na slobodnoj i oplakanoj površini izvode se iz činjenice da se obje kontaktne površine uvijek sastoje od jednih te istih čestica fluida. U općem slučaju, ako se sa η označi položaj bilo koje kontaktne površine, tada je materijalna derivacija razlike vertikalne koordinate položaja y i položaja kontaktne površine η jednaka nuli na cijelom razmatranom rubu domene strujanja:

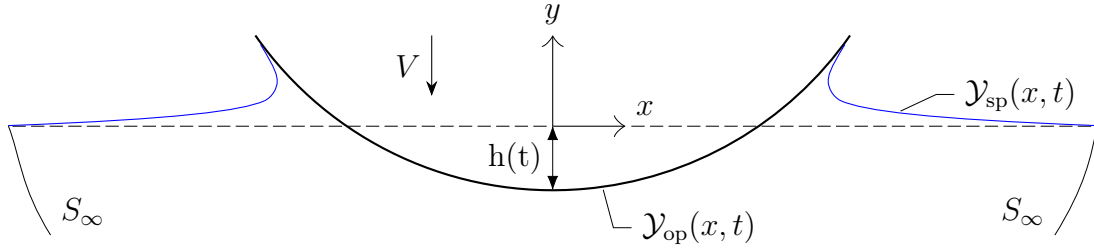
$$\frac{D}{Dt}(y - \eta) = \frac{\partial y}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla y - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \vec{v} \cdot \nabla \eta = 0 \quad (2.7)$$

Uvrštavanjem u (2.7) izraza za brzinu strujanja fluida u ovisnosti o potencijalu (2.2), izraza za gradijente koordinate položaja ∇y i kontaktne plohe $\nabla \eta$:

$$\begin{aligned} \nabla y &= \frac{\partial y}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial y} \vec{j} = \vec{j} \\ \nabla \eta &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \vec{j} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \vec{i} \end{aligned}$$

te uz činjenicu da je $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$, konačni oblik kinematičkog rubnog uvjeta na kontaktnoj površini glasi:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (2.8)$$



Slika 2.1: Domena strujanja pri simetričnom prodiranju tijela

U slučaju da η predstavlja oplakanu površinu tijela, izraz (2.8) poprima nešto drugačiji oblik. Uvrštavanjem pravih vrijednosti parcijalnih derivacija funkcije kontaktne plohe $\eta(x, t)$ koje vrijede na oplakanoj površini

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\partial \mathcal{Y}_{\text{op}}(x, t)}{\partial x} = \frac{d y_t(x)}{dx} = y'_t(x) \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{Y}_{\text{op}}(x, t)}{\partial t} = -V \vec{n} \end{aligned}$$

kinematički rubni uvjet na oplakanoj površini poprima konačni oblik:

$$y'_t(x) \frac{\partial \phi}{\partial x} - n \frac{\partial \phi}{\partial y} = V \vec{n} \quad (2.9)$$

Dinamički rubni uvjet na slobodnoj površini dobiva se iz Cauchy-Lagrangeovog integrala:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p - p_v}{\rho} + \frac{1}{2} |\nabla^2 \phi| + gy = 0 \quad (2.10)$$

S obzirom da na slobodnoj površini vrijedi $p = \text{konst.}$, a gravitacija se može zanemariti zbog velikih brzina udara, vrijedi sljedeće:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 = 0 \quad (2.11)$$

ili:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad (2.12)$$

U početnom trenutku slobodna površina miruje pa vrijedi:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, 0) &= 0 \\ \mathcal{Y}_{\text{sp}}(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Na dovoljno velikoj udaljenosti od prodirućeg tijela vrijede sljedeći uvjeti:

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow 0 \quad \text{na } x^2 + y^2 \rightarrow \infty \\ \mathcal{Y}_{\text{sp}} &\rightarrow 0 \quad \text{za } |x| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.14)$$

Konačno, problem simetričnog prodiranja dvodimenzionalnog tijela kroz početno neporemećenu tekućinu definira se sljedećim jednadžbama i rubnim uvjetima (Problem I):

$$(I) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 & \text{u domeni strujanja} \\ y'_t(x) \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} = -V n_y & \text{na } y = \mathcal{Y}_{\text{op}}(x, t) \\ \frac{\partial \mathcal{Y}_{\text{sp}}}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{Y}_{\text{sp}}}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 & \text{na } y = \mathcal{Y}_{\text{sp}}(x, t) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] = 0 & \text{na } y = \mathcal{Y}_{\text{sp}}(x, t) \\ \phi \rightarrow 0 & \text{na } x^2 + y^2 \rightarrow \infty \\ \mathcal{Y}_{\text{sp}} \rightarrow 0 & \text{za } |x| \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

(I) je eliptičan problem strujanja sa slobodnom površinom s nestacionarnim i nelinearnim rubnim uvjetima za kojega u općem slučaju nisu poznata eksplisitna rješenja. Rješenja su poznata samo za nekolicinu pojednostavljenih primjera kao što je npr. prodiranje klina.

2.2. Analitičke metode rješavanja problema

Hidrodinamički problem prodiranja tijela kroz tekućinu karakterizira izrazita nelinearnost čije uspješno rješavanje je povezano sa zadovoljavanjem nelinearnih rubnih uvjeta na slobodnoj površini. Općenito to nije jednostavan zadatak ponajviše zbog činjenice da se u općem nestacionarnom strujanju slobodna površina ne poklapa s plovom gdje funkcija toka poprima konstantnu vrijednost [20].

Prve modele rješavanja problema neovisno jedan o drugome predložili su Von Karman (1929) [10] i Wagner (1932) [11] koji su istraživali udarna opterećenja pri slijetanju hidroaviona na površinu vode. Von Karmanov pristup zasniva se na očuvanju količine gibanja sustava koji čine fluid i prodiruće tijelo, dok je Wagner primijenio metodu sličnog strujanja pri čemu je prodiranje klinastog tijela opisao kao potencijalno strujanje oko ekspanzirajuće ravne ploče.

Dobrovol'skaja (1969) [20] je za klinasto tijelo proizvoljnog kuta nagiba koje prodire konstantnom vertikalnom brzinom V predložila analitičko rješenje zasnovano na principu sličnog strujanja. Predloženo rješenje dano je u implicitnom obliku preko integralnih jednadžbi koje je, za odabrani problem, potrebno numerički riješiti.

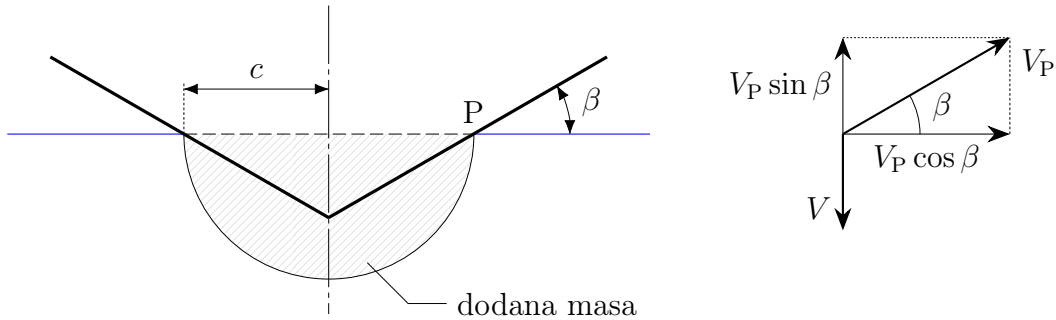
Wagnerov rad je poslužio kao osnova svih kasnijih teorijskih modela za rješavanje problema prodiranja. Među tim modelima ističu se radovi Cointa i Armanda (1987) [13], Howisona i sur. (1991) [14] te Faltinsena (1993) [21] koji su korištenjem asimptotskog razvoja opisali nelinearno strujanje u mlazu na dodiru između tijela i slobodne površine.

2.2.1. Von Karmanova metoda

U Von Karmanovom modelu [10] zanemarena je gravitacija i porast razine slobodne površine zbog velikih brzina udara (Slika 2.2). Integracijom jednadžbe gibanja u intervalu od $t = 0$ do $t = T$ dobiva se jednadžba količine gibanja:

$$(m + m_{zz})V - mV_0 = \int_0^T F dt \quad (2.15)$$

gdje je m masa tijela, m_{zz} dodana masa, V brzina tijela nakon udara, V_0 brzina tijela prije udara, F zbroj svih vanjskih sila koje djeluju na tijelo (uzgon, gravitacija, trenje).



Slika 2.2: Skica von Karmanovog modela s pripadajućim vektorima brzina

Razmatra se tijelo u obliku klina (slika 2.2) čija dodana se masa aproksimira sljedećom relacijom:

$$m_{zz} = \frac{1}{2}\pi\rho c^2 \quad (2.16)$$

Brzina nakon udara se računa iz vektora brzina koji se postavlja u točki P (desna strana tijela, Slika 2.2). Promjena horizontalnog položaja u vremenu kontaktne točke c jednaka je horizontalnoj komponenti brzine V_P kojom se točka P giba duž površine klina:

$$\frac{dc}{dt} = V_P \cos \beta \quad (2.17)$$

iz čega uz $V_P \sin \beta = -V$ slijedi izraz za brzinu nakon udara:

$$V = -\frac{1}{\operatorname{arctg} \beta} \frac{dc}{dt} \quad (2.18)$$

gdje je ρ gustoća fluida, c polovina uronjenog dijela tijela gledano u smjeru horizontalne koordinate, β kut između tangente na površinu tijela i ravnine neporemećene tekućine, $\frac{dc}{dt}$ brzina promjene horizontalnog položaja kontaktne točke. Uvrštavanjem gornjih izraza u jednadžbu količine gibanja (2.15) te uz pretpostavku da je $F \approx 0$ (idealni fluid te zanemarene masene sile) slijedi konačni izraz za brzinu promjene varijable c :

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{V_0 \operatorname{ctg} \beta}{1 + \frac{\pi\rho c^2}{2m}} \quad (2.19)$$

Udarno opterećenje dobiva se iz jednadžbe gibanja:

$$\begin{aligned} F_I &= \frac{d}{dt}(m_{zz}) = -m \frac{dV}{dt} = -\frac{m}{\operatorname{ctg} \beta} \frac{d^2c}{dt^2} \\ &= -\frac{V_0^2 \operatorname{ctg} \beta}{\left(1 + \frac{\pi\rho c}{m}\right)^3} \pi\rho c \end{aligned} \quad (2.20)$$

Prosječni tlak na uronjeni dio tijela dobiva se dijeljenjem udarnog opterećenja s horizontalnom dimenzijom uronjenog dijela tijela:

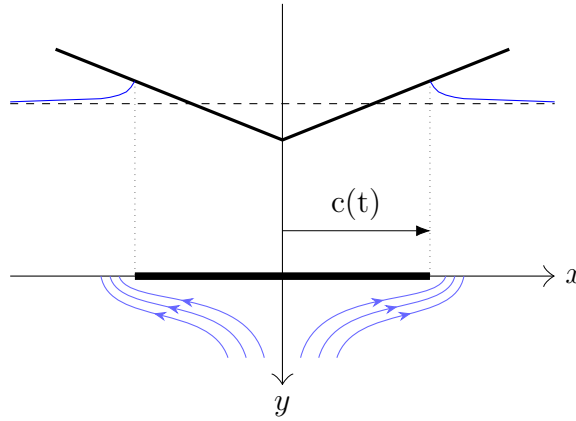
$$p_{\text{VoK}} = \frac{F_I}{2c} = \frac{1}{2}\rho V_0^2 \frac{\pi \operatorname{ctg} \beta}{\left(1 + \frac{\pi\rho c}{m}\right)^3} \quad (2.21)$$

S obzirom da se zanemaruje porast razine slobodne površine uslijed udara, dobivena dodana masa nešto je niža u odnosu na stvarnu vrijednost pa je shodno tome i izračunato opterećenje podcijenjeno. Razlika je vidljivija pri manjim kutovima nagiba β kod kojih je izraženiji porast slobodne površine.

2.2.2. Wagnerovo rješenje

Pri formuliranju modela Wagner [11] postavio je hipotezu prema kojoj u slučaju da je $\beta \rightarrow 0$, odnosno pri malim kutevima nagiba, gibanje fluida oko tijela može se aproksimirati strujanjem oko ekspanzirajuće ravne ploče na čiju ravninu okomito nailazi idealni fluid brzinom V (Slika 2.3). Uveo je sljedeće pretpostavke:

- početno mirujuća ravna slobodna površina giba se vertikalno prema gore u odnosu na nepomično tijelo
- brzina slobodne površine ovisi samo o vremenu $V = V(t)$
- vektor brzine fluida na slobodnoj površini usmjeren je vertikalno prema gore
- vektor brzine na oplakanoj površini pozicioniran je u smjeru normale na površinu tijela.



Slika 2.3: Skica Wagnerovog modela

Kompleksni potencijal bescirculacijskog optjecanja ravne ploče na koju nastrujava fluid brzinom $\vec{V} = (0, -V)$ opisuje se sljedećim izrazom:

$$w(z) = -i V \sqrt{z^2 - c^2} \quad (2.22)$$

gdje je c horizontalna koordinata kontaktne točke između tijela i slobodne površine fluida. Varijabla c može se definirati i kao polovina širine ravnine tlaka koji djeluje na prodiruće tijelo (Slika 2.4). Komponente brzine čestice fluida dobivaju se iz konjugirane brzine strujanja:

$$\frac{dw(z)}{dz} = v_x - i v_y$$

Na slobodnoj površini vrijedi $y = 0$ što znači da je $z = x$. Slijedi da je na slobodnoj površini ($x > c$) brzina čestica fluida:

$$v_n = v_y = \frac{V}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{x^2}}} \quad (2.23)$$

Na položaju $x = c$ vertikalna brzina čestice fluida na slobodnoj površini teži u ∞ , tj. funkcija brzine čestice fluida na slobodnoj površini ima singularnu točku na poziciji kontakta s tijelom. Podizanje razine slobodne površine od početnog trenutka

udara $\tau = 0$ do nekog trenutka $\tau = t$ dobiva se integracijom brzine na slobodnoj površini u vremenu:

$$\mathcal{Y}_{\text{sp}} = \int_{\tau=0}^{\tau=t} v_n(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \frac{V(\tau)}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{x^2}}} d\tau \quad (2.24)$$

Vremenski trenutak t ovisi samo o širini ravnine tlaka $t = f(c)$, dok brzina slobodne površine ovisi samo o vremenu $V = f(t)$. Širina ravnine tlaka c ovisi jedino o vremenu $c = f(t)$ te se može smatrati nezavisnom varijablom.

Stoga se podizanje razine slobodne površine može izraziti u ovisnosti o nezavisnoj varijabli c . U trenutku kada čestica fluida na poziciji x dostigne rub ravnine tlaka vrijedi $c = x$ odnosno $\mathcal{Y}_{\text{sp}} = \mathcal{Y}_{\text{sp}}^c$ pa izraz kojim se opisuje podizanje razine slobodne površine poprima sljedeći oblik:

$$\mathcal{Y}_{\text{sp}}^c = \int_0^x \frac{V \frac{dt}{dc}}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{x^2}}} dc = \int_0^x \frac{u(c)}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{x^2}}} dc \quad (2.25)$$

Funkcija $u(c)$ ovisi samo o lijevoj strani jednadžbe, tj. ovisi samo o funkciji $\mathcal{Y}_{\text{sp}}^c(x)$, a ne o brzini slobodne površine $V = V(t)$ te predstavlja isključivo geometrijsku veličinu:

$$u(c) = V \frac{dt}{dc} = \frac{V}{\frac{dc}{dt}} \quad (2.26)$$

gdje je $\frac{dc}{dt}$ brzina širenja ravnine tlaka po oplakanoj površini tijela. Izraz (2.25) mora vrijediti za svaki x te predstavlja integralnu jednadžbu u kojoj treba odrediti nepoznatu funkciju $u(c)$.

Lijeva strana integralne jednadžbe (2.25) može se razviti u red $Y_B = \vartheta x + \vartheta_1 x^2 + \vartheta_2 x^3 + \dots$ čime se rješenje jednadžbe dobiva u sljedećem obliku:

$$u = u(c) = \frac{2}{\pi} \vartheta + \vartheta_1 c + \vartheta_2 c^2 + \vartheta_3 c^3 + \dots \quad (2.27)$$

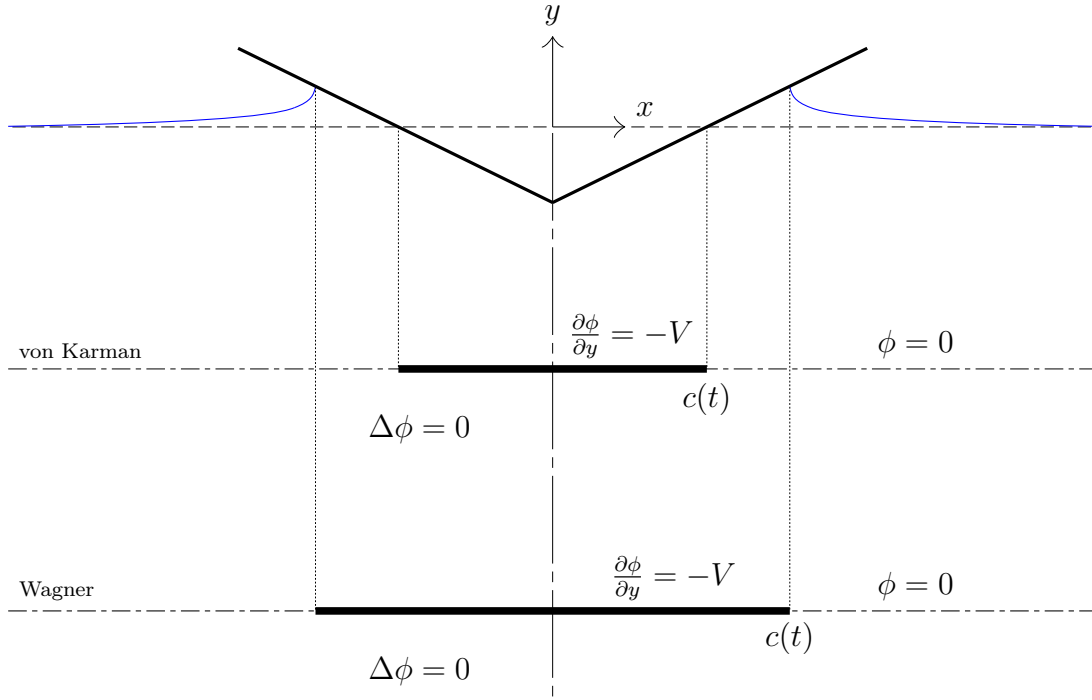
U slučaju da je v_n poznata kao funkcija vremena $v_n = v_n(t)$ tada se širina ravnine tlaka $c(t)$ može izračunati iz sljedećeg izraza:

$$\int_0^c u(c) dc = \int_0^t v_n(t) dt \quad (2.28)$$

Za klin s kutem nagiba β izraz za širinu ravnine tlaka odnosno podizanje slobodne površine ima sljedeći oblik:

$$c(t) = \frac{1}{2} \pi \frac{Vt}{\text{tg } \beta} \quad (2.29)$$

$$\mathcal{Y}_{\text{sp}} = \frac{2}{\pi} \vartheta x \arcsin \frac{c}{x} \quad (2.30)$$



Slika 2.4: Usporedba von Karmanovog i Wagnerovog modela

Raspodjela tlaka na oplakanoj površini tijela računa se iz Cauchy-Langrangeovog integrala koji za razmatrani slučaj potencijalnog strujanja oko ravne ploče (2.22) prelazi u:

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2}v_x^2 \quad (2.31)$$

Potencijal brzine ϕ odnosno vertikalna brzina fluida na domeni strujanja definirani su sljedećim izrazima [7]:

$$\phi = \begin{cases} V\sqrt{c^2 - x^2} & x < c \\ 0 & x > c \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \begin{cases} 0 & x < c \\ V/\sqrt{1 - \frac{c^2}{x^2}} & x > c \end{cases} \quad (2.33)$$

Nakon deriviranja potencijala ϕ (2.32) po vremenu (uz $V = V(t)$ i $c = c(t)$) odnosno po prostornoj varijabli x te uvrštavanja u (2.31):

$$\frac{p}{\rho} = \sqrt{c^2 - x^2} \frac{dV}{dt} + V \frac{c}{\sqrt{c^2 - x^2}} \frac{dc}{dt} - \frac{V^2 x^2}{2(c^2 - x^2)} \quad (2.34)$$

Za klin s kutem nagiba β brzina širenja ravne ploče je $\frac{dc}{dt} = \frac{\pi}{2} V \operatorname{ctg} \beta$ pa nakon uvrštavanja u (2.34) dobiva se izraz za tlak prema Wagnerovom modelu:

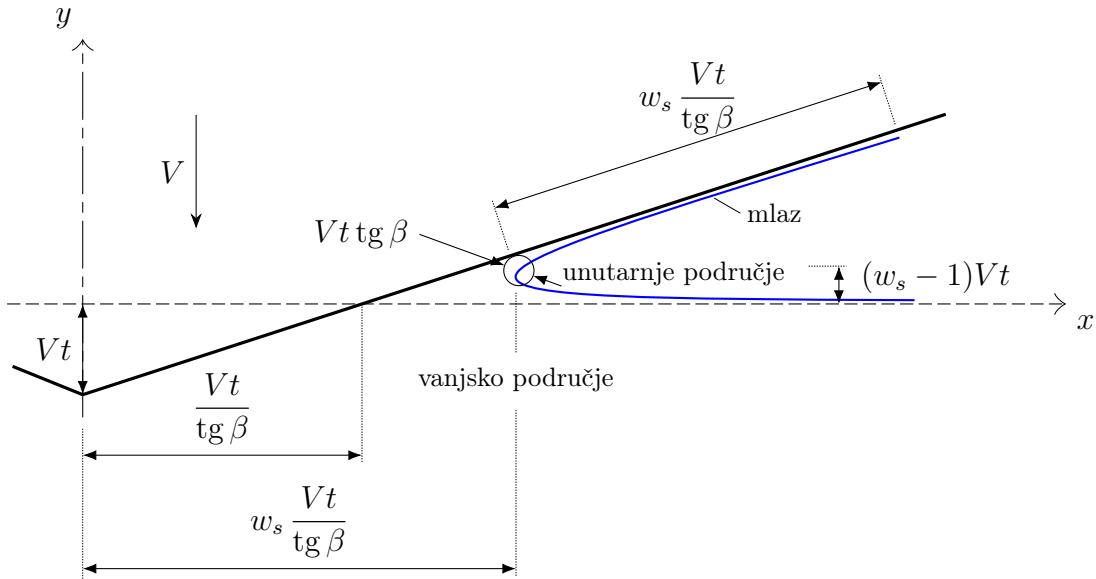
$$p_{\text{Wag}} = \frac{1}{2} \rho V^2 \left[\frac{\pi \operatorname{ctg} \beta}{\sqrt{1 - x^2/c^2}} - \frac{x^2/c^2}{1 - x^2/c^2} + \frac{2}{V^2} \frac{dV}{dt} \sqrt{c^2 - x^2} \right] \quad (2.35)$$

2.2.3. Asimptotsko rješenje za male kutove nagiba

Za male kutove nagiba β između tangente na površinu tijela i ravnine neporemećene tekućine može se primijeniti metoda usklađenog asimptotskog razvoja. Na Slici 2.5 prikazane su dimenzije različitih područja strujanja u ovisnosti o faktoru oplakivanja w_s , brzine uranjanja V , vremenu t i lokalnom kutu nagiba β . Faktor oplakivanja definira se kao omjer horizontalnog položaja kontaktne točke (odnosno ravnine tlaka) Wagnerovog i Von Karmanovog modela strujanja.

Pri prodiranju krutog tijela razlikuju se vanjsko i unutarnje strujanje te mlaz. Unutarnje strujanje pokriva područje stvaranja mlaza odnosno usko područje kontakta slobodne površine fluida s tijelom. Vanjsko područje obuhvaća preostalu domenu strujanja, a mlaz područje strujanja koje se formira u produžetku kontaktne točke.

S obzirom da u mlazu vlada atmosferski tlak taj dio strujanja može se isključiti iz domene prilikom proračuna. Za svako pojedino područje koje se razmatra (vanjsko i unutarnje) traži se približno rješenje problema u obliku asimptotskog razvoja, a zatim se njihovom kombinacijom traži rješenje koje vrijedi na cjelokupnoj domeni strujanja. Postupak usklađivanja rješenja opisan je u radovima Cointea i Armanda [13], Cointea [41] te Howisona i dr. [14], dok će se ovdje prikazati dvije metode za određivanje raspodjele tlakova duž oplakane površine tijela.



Slika 2.5: Prikaz područja strujanja pri prodiranju tijela kroz tekućinu

Faltinsenova metoda. Raspodjela tlaka na uronjenoj površini u vanjskoj domeni strujanja aproksimira se sljedećom funkcijom:

$$p_{\text{ext}} = \rho V c \frac{dc}{dt} \frac{1}{\sqrt{c^2 - x^2}} \quad \text{za } |x| < c(t) \quad (2.36)$$

gdje je širina ravnine tlaka $c(t)$ ovisna o obliku poprečnog presjeka prodirućeg tijela te se može odrediti iz Wagnerovog rješenja (2.28). U slučaju klina s kutom nagiba β

širina ravnine tlaka računa se iz izraza (2.30). Raspodjela tlaka u unutarnjoj domeni strujanja računa se prema Wagneru [11]:

$$p_{\text{int}} = 2\rho \left(\frac{dc}{dt} \right)^2 \frac{\sqrt{\tau}}{1 + \sqrt{\tau}} \quad (2.37)$$

gdje je τ parametar koji ovisi o horizontalnoj koordinati položaja x na sljedeći način:

$$x - c = \frac{\delta}{\pi} \left(-\ln |\tau| - 4\sqrt{|\tau|} - |\tau| + 5 \right) \quad (2.38)$$

Debljina mlaza dobiva se usklađivanjem rješenja na vanjskoj i unutarnjoj domeni:

$$\delta = \frac{\pi V^2 c}{4 \left(\frac{dc}{dt} \right)^2} \quad (2.39)$$

Vrijednosti parametra τ kreću se od 0 do $+\infty$. Vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} \tau &\longrightarrow 0 & , & \quad x \longrightarrow \infty \\ \tau &\longrightarrow \infty & , & \quad x \longrightarrow -\infty \end{aligned}$$

U slučaju da τ poprima vrlo velike vrijednosti ($\tau \gg 1$), τ se računa iz pojednostavljenog izraza (2.38):

$$|\tau| \approx (c - x) \frac{\pi}{\delta}$$

Također uz pretpostavku $\tau \gg 1$ te uvrštavanjem pojednostavljenog izraza za τ , tlak u unutarnjoj domeni se može približno odrediti na sljedeći način:

$$p_{\text{int}} \sim \rho V c \frac{1}{\sqrt{2c(c-x)}} \quad (2.40)$$

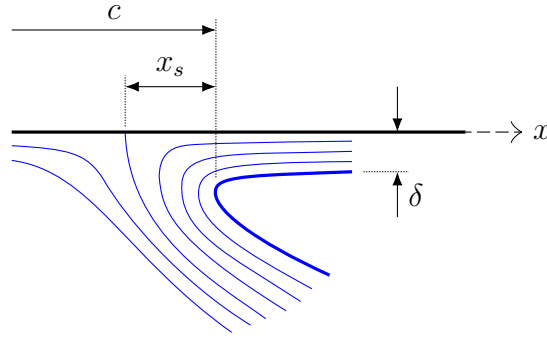
Kada je $x \longrightarrow c$, tlak u vanjskoj domeni p_{ext} teži istoj vrijednosti kao i tlak u unutarnjoj domeni p_{int} u slučaju kada $\tau \gg 1$, odnosno kada $(c - x) \gg 1$:

$$p_{\text{ext}} \sim \rho V c \frac{1}{\sqrt{2c(c-x)}}$$

Ukupno rješenje za raspodjelu tlaka na čitavoj oplakanoj površini tijela dobiva se sumiranjem izraza za tlak u vanjskoj i unutarnjoj domeni te oduzimanjem zajedničkog asimptotskog člana (2.40):

$$p = \rho V c \frac{dc}{dt} \frac{1}{\sqrt{c^2 - x^2}} - \rho V c \frac{1}{\sqrt{2c(c-x)}} + 2\rho \left(\frac{dc}{dt} \right)^2 \frac{\sqrt{\tau}}{1 + \sqrt{\tau}} \quad (2.41)$$

Konačni izraz za tlak nema singularnog rješenja u slučaju da je $x = c(t)$.



Slika 2.6: Područje formiranja mlaza. Položaj točke zastoja

Cointeova metoda. Cointeov pristup se razlikuje od Faltinsenovog u načinu definiranja distribucije tlaka u vanjskoj domeni. Ideja je da se uzmu u obzir članovi drugog reda veličine u Cauchy-Lagrangeovom integralu (brzina na kvadrat) koji su zanemareni u Faltinsenovoj metodi. Tlak u vanjskoj domeni definira se do točke zastoja strujanja $x_s(t)$:

$$p_{\text{ext}} = \rho V c \frac{dc}{dt} \frac{1}{\sqrt{c^2 - x^2}} - \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{c^2}{c^2 - x^2} \quad |x| < c(t) + x_s(t) \quad (2.42)$$

U području nastanka mlaza, ispred točke zastoja (Slika 2.6), tlak se računa prema Wagneru [11] kako je to definirano izrazom (2.37):

$$p_{\text{mlaz}} = 2\rho \left(\frac{dc}{dt} \right)^2 \frac{\sqrt{\tau}}{1 + \sqrt{\tau}}$$

U odnosu na Faltinsenov pristup, razlika je u načinu računanja parametra τ koji se dobiva iz sljedeće relacije:

$$x - c - x_s = \frac{\delta}{\pi} \left(-\ln |\tau| - 4\sqrt{|\tau|} - |\tau| + 5 \right) \quad (2.43)$$

Oba izraza za tlak (u vanjskoj domeni i u mlazu) daju istu maksimalnu vrijednost tlaka koja se postiže u istoj točki koja odgovara točki zastoja. Položaj točke zastoja definiran je sljedećim izrazom:

$$x_s = -\frac{4\delta}{\pi} \quad (2.44)$$

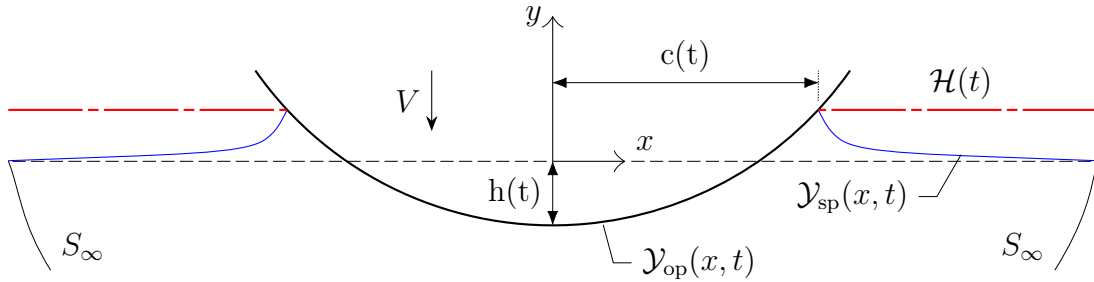
U unutarnjoj domeni maksimalni tlak dostiže se pri $\tau = 1$.

2.3. Modeli s djelomično pojednostavljenim rubnim uvjetima

Modeli rješavanja problema prodiranja s djelomično pojednostavljenim rubnim uvjetima zasnivaju se na lineariziranju jednog od rubnih uvjeta (na slobodnoj ili oplakanoj površini) lineariziranjem definicijske jednadžbe uz zadržavanje drugog u originalnom obliku na način opisan u osnovnoj formulaciji problema (Poglavlje 2.1.).

U ovu skupinu ubrajaju se svi modeli temeljeni na tzv. poopćenom Wagnerovom pristupu (PW) kao što su modeli Zhaoa i sur. [22], Meija i sur. [39] te u novije vrijeme Halmersa i Skeieja [42]. Poopćeni Wagnerov pristup temelji se na pojednostavljenom prikazu slobodne površine za razliku od njenog stvarnog oblika koji se u općem slučaju opisuje kinematičkim (2.8) odnosno dinamičkim rubnim uvjetom (2.12) iz osnovne formulacije problema prodiranja (Problem I).

Također, u skupinu modela s pojednostavljenim rubnim uvjetima spada i Vorusov model [24] čiji pristup se temelji na pretpostavci da na rješenje problema prodiranja više utječe slobodna površina tekućine u odnosu na oplakanu površinu tijela. U skladu s time pojednostavljuje se rubni uvjet na oplakanoj površini te se tijelo prikazuje kao ravna ekspanzirajuća ploča, a slobodna površina se opisuje egzaktnim rubnim uvjetima (Problem I).



Slika 2.7: Prikaz prodirućeg tijela s osnovnim parametrima koji ga opisuju

Kod poopćenog Wagnerovog pristupa slobodna površina se umjesto u stvarnom obliku opisuje horizontalnim pravcem smještenim na vertikalnoj koordinati pozicije gdje nastaje mlaz (Slika 2.7). Kako je položaj proračunske slobodne površine $\mathcal{H}(t)$ time određen nema potrebe za postavljanjem dinamičkog rubnog uvjeta.

Umjesto rubnog uvjeta na proračunskoj slobodnoj površini definira se vrijednost potencijala brzine koja je jednaka nuli $\phi = 0$. Nakon proračunavanja potencijala na oplakanoj te brzina fluida na slobodnoj površini određuje se stvaran oblik slobodne površine pomoću lineariziranog kinematičkog rubnog uvjeta (vrijednost drugog člana u izrazu (2.8) može se zanemariti).

U pojednostavljenom obliku model poopćenog Wagnera pri simetričnom uronu formuliran je sljedećim izrazima (Problem II) [40]:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{na } \mathcal{D} \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -V n_y \quad \text{na } y = \mathcal{Y}_{op}, |x| < c(t) \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Y}_{sp}(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, \mathcal{H}(t), t) \quad \text{na } y = \mathcal{Y}_{sp}, |x| > c(t) \quad (2.47)$$

$$\phi = 0 \quad \text{na } y = \mathcal{H}(t), |x| > c(t) \quad (2.48)$$

$$\phi \rightarrow 0 \quad \text{na } x^2 + y^2 \rightarrow \infty \quad (2.49)$$

$$\mathcal{H}(t) = y_t(c(t)) - h(t) \quad (2.50)$$

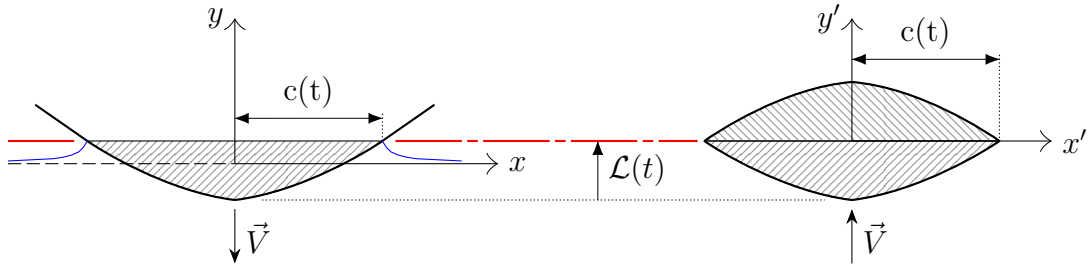
Tijelo prodire u tekućinu vertikalno brzinom V , a dubina prodiranja $h(t)$ unaprijed je poznata. Trenutna pozicija tijela izražava se jednačbom $y = y_t(x) - h(t)$ gdje funkcija y_t opisuje konturu tijela. Stvarni oblik i položaj slobodne površine nakon udara $\mathcal{Y}_{sp}(x, t)$ i horizontalna dimenzija kontaktnog područja $c(t)$ (širina ravnine tlaka u Wagnerovom modelu) nisu poznati unaprijed te se trebaju se odrediti zajedno s rješenjem.

U početnom trenutku $t = 0$ podrazumijeva se da je potencijal brzine jednak nuli $\phi = 0$ na cijeloj domeni te da slobodna površina miruje.

2.3.1. Poopćeni Wagnerov model simetričnog prodiranja korištenjem konformnog preslikavanja

Poopćeni Wagnerov model simetričnog prodiranja tijela koji su predložili Mei i sur. (1999) [39] zasniva se na primjeni metode konformnog preslikavanja kojim se rješava potencijal brzine zrcalno simetričnog tijela.

S obzirom da vrijedi uvjet $\phi = 0$ na proračunskoj slobodnoj površini (\mathcal{H}) slika ekvipotencijalnih linija je zrcalno simetrična u odnosu na ravninu $y = \mathcal{H}$. Imajući to u vidu slika strujanja pri simetričnom prodiranju tijela može se prikazati kao strujanje oko fiktivnog dvostrukog tijela, zrcalno simetričnog u odnosu na \mathcal{H} , koje se giba konstantnom brzinom V u smjeru $-y$. Koordinatni sustav nove slike strujanja (x', y') smješten je nepomično na tijelu pri čemu koordinatne osi čine horizontalnu odnosno okomitu os simetrije dvostrukog tijela (Slika 2.8).



Slika 2.8: Prikaz koordinatnih sustava (x, y) i (x', y')

Nove koordinatne osi (x', y') prema osima formulacije poopćenog Wagnera odnose se na sljedeći način:

$$x' = x \quad y' = y - \mathcal{H} \quad (2.51)$$

Potencijal brzine ϕ osnovnog problema u odnosu na potencijal problema dvostrukog tijela Φ povezani su sljedećom relacijom:

$$\phi(x, y, t) = \Phi(x', y', t) - Vy' \quad (2.52)$$

Rješavanje postavljenog problema sastoji se od tri osnovna koraka:

- (i) računanje promjene položaja kontaktne točke u vremenu integracijom kinematičkog rubnog uvjeta na slobodnoj površini
- (ii) računanje potencijala problema dvostrukog tijela Φ

(iii) računanje tlaka na oplakanoj površini

Promjena vertikalnog položaja kontaktne točke $\mathcal{H}(c)$ u koordinatnom sustavu (x, y) određuje se integracijom u vremenu kinematičkog rubnog uvjeta (2.47):

$$\mathcal{H}(c) = \mathcal{L}(c) - Vt = \int_0^t v(c, \tau) d\tau \quad (2.53)$$

gdje je \mathcal{L} funkcija koja opisuje položaj kontaktne točke u smjeru y ili y' koordinate mjereno od najniže točke tijela (Slika 2.8), τ ograničena varijabla ($\tau < t$), a $v(c, \tau)$ vertikalna brzina slobodne površine na poziciji $y = c(t)$.

Brzina $v(c, \tau)$ može se izraziti preko parcijalne derivacije potencijala brzine po vertikalnoj prostornoj varijabli osnovnog PW problema ili problema dvostrukog tijela i to na sljedeći način:

$$v(c(t), \tau) \equiv \frac{\partial}{\partial y} \phi(c(t), \mathcal{H}(c(\tau)), \tau) = \frac{\partial}{\partial y'} \Phi(c(t), 0, \tau) - V \quad (2.54)$$

Kako brzina $v(c(t), \tau)$ ovisi o povijesti promjene položaja kontaktne točke $y = c(\tau)$ koja unaprijed nije poznata, prethodnim izrazima (2.53) odnosno (2.54) dana je implicitna zavisnost o vremenskoj varijabli preko položaja kontaktne točke $c(t)$.

Eksplisitna zavisnost o vremenskoj varijabli dobiva se uvrštavanjem izraza (2.54) za problem dvostrukog tijela u izraz (2.53):

$$\mathcal{L}(c) - Vt = \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial z'} \Phi(c(t), 0, \tau) - V \right] d\tau = \int_0^t v(c(t), \tau) d\tau - \underbrace{\int_0^t V d\tau}_{=Vt} \quad (2.55)$$

te zamjenom zavisne τ s nezavisnom varijablom $l \equiv c(\tau)$, uz definiranje novih nepoznanica $\mu(l) \equiv V \frac{d\tau}{dl}$ i $v_0 \equiv \frac{v}{V}$, pri čemu izraz (2.55) prelazi u:

$$\mathcal{L}(c(t)) = \int_0^{c(t)} v_0(c(t), \tau(l)) \mu(l) dl \quad (2.56)$$

Izraz (2.56) predstavlja integralnu jednadžbu s nepoznanicom $\mu(l)$ koja je rješiva ako je poznata zavisnost jezgre $v_0(c, \tau)$ o l . U općem slučaju, kod tijela proizvoljnog oblika, zavisnost v_0 o l je vrlo složena te se rješenje za $\mu(l)$ ne može pronaći u konačnom broju matematičkih operacija.

U slučaju tijela glatke konveksne površine veličina $c(t)$ mijenja se glatko s vremenom pa se stoga i $\mu(l)$ mijenja glatko u ovisnosti o varijabli l . Tada se $\mu(l)$ može aproksimirati pomoću Čebiševljevih polinoma na sljedeći način:

$$\mu(l) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(l) \quad \text{za } l \in [0, c_{\max}] \quad (2.57)$$

gdje je c_{\max} maksimalna vrijednost varijable c koja se dostiže tijekom prodiranja, a_n nepoznati koeficijenti. $T_n(l)$ je definiran relacijom:

$$T_n(l) = T_n \left(\frac{2l}{c_{\max}} - 1 \right)$$

gdje je T_n Čebiševljev polinom prve vrste n -tog stupnja. U praktičnim proračunima uzima se konačan broj Čebiševljevih polinoma ($n = N$), a njihova brojnost ovisi o razini točnosti aproksimacije. Pokazalo da u slučaju dovoljno glatkog tijela izraz (2.57) relativno brzo konvergira.

Uvrštavanjem (2.57) u (2.56) i sređivanjem dobiva se sljedeća relacija:

$$\mathcal{L}(c) = \sum_{n=0}^N a_n \alpha_n(c) \quad \text{za } c \in [0, c_{\max}] \quad (2.58)$$

gdje su α_n utjecajni koeficijenti koji se računaju iz izraza

$$\alpha_n(c) = \int_0^c v_0(c, l) T_n(l) dl \quad n = 0, 1, \dots, N$$

Za tijela klinaste geometrije nepoznati koeficijenti a_n dobivaju se iz analitičkog rješenja izraza (2.58). U ostalim slučajevima izraz (2.58) se rješava numeričkim putem korištenjem kolokacijske metode na način da se isti primjeni u $N+1$ odabranoj diskretnoj točki na tijelu na intervalu $c \in [0, c_{\max}]$. Rješenje tako postavljenog linearnog sustava od $N+1$ jednadžbe su koeficijenti a_n .

Vremenska zavisnost položaja kontaktne točke $c(t)$ dobiva se iz izraza:

$$Vt = \sum_{n=0}^N \frac{b_n}{n+1} c^{n+1} \quad (2.59)$$

gdje se b_n koeficijenti određuju na sljedeći način:

$$\mu(l) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(l) = \sum_{n=0}^N b_n l^n \quad \rightarrow \quad b_n = \sum_{k=0}^n a_k c_{kn} \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (2.60)$$

Koeficijenti c_{kn} predstavljaju poznate konstante koje se javljaju u jednadžbama Čebiševljevih polinoma s time da prvi indeks k označava jednadžbu stupnja polinoma kojoj pripada koeficijent, a drugi n pojedini član unutar jednadžbe.

Rješenje problema dvostrukog tijela u obliku potencijala Φ za bilo koji položaj kontaktne točke $c(t)$ dobiva se primjenom konformnog preslikavanja u pomoćnu domenu w uz zadovoljenje rubnog uvjeta na oplakanoj površini dvostrukog tijela (2.46). Kod tijela jednostavnije geometrije kao što su klinovi ili kružnice rješenje se može naći u konačnom broju matematičkih operacija, dok kod tijela općeg oblika to nije moguće. Za tijela s oblikom tipičnih brodskih formi rješenje je moguće naći korištenjem tzv. Lewisovih formi [43].

Računanje tlaka na oplakanoj površini tijela svodi se na proračun Cauchy–Lagrangeovog integrala za problem dvostrukog tijela:

$$\frac{p(x, t)}{\rho} = -\frac{D\Phi}{Dt} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'} \right)^2 \right] - \frac{D\mathcal{L}(c)}{Dt} V + \frac{1}{2} V^2 \quad (2.61)$$

gdje $\frac{D}{Dt}$ označava materijalnu derivaciju.

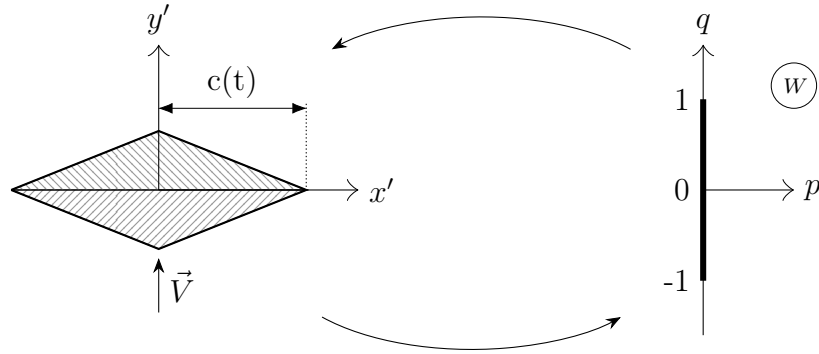
Klinasta tijela

Kod tijela klinastog poprečnog presjeka rješava se problem uniformnog strujanja oko romba širine $2c(t)$ s ulaznim kutom $\pi - 2\beta$ (Slika 2.9). Rješenje problema dobiva se pomoćnoj kompleksnoj domeni $W = p + iq$ koja je s polaznom domenom $Z = x' + iy'$ povezana Schwartz–Christoffelovim preslikavanjem:

$$\frac{Z}{c(t)} = \frac{W^{2\vartheta+1}}{A(2\vartheta+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\vartheta)_n \left(\frac{1}{2} + \vartheta\right)_n}{\left(\frac{3}{2} + \vartheta\right)_n} \frac{(-W^2)^n}{n!} + 1, \quad |-W^2| < 1 \quad (2.62)$$

gdje je $\vartheta = \frac{\pi - 2\beta}{2\pi}$, a $(\diamond)_n$ Pochhammerova oznaka (pri čemu je \diamond proizvoljni argument) koja ima sljedeće značenje:

$$(\diamond)_n = \begin{cases} 0 & \text{za } n = 0 \\ \diamond(\diamond+1)\dots(\diamond+n-1) = \frac{\Gamma(\diamond+n)}{\Gamma(\diamond)} & \text{za } n > 0 \end{cases}$$



Slika 2.9: Prikaz dvostrukog klinastog tijela i njegove slike u ravнини W

A je koeficijent ovisan o kutu nagiba klina β :

$$A = \frac{\cos \beta}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1 - \vartheta) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \vartheta\right) \quad (2.63)$$

Potencijal brzine računa se iz sljedeće relacije:

$$\Phi(Z, t) = \operatorname{Re}\left\{ -iW \right\} \frac{V}{A} c(t) \quad (2.64)$$

Položaj kontaktne točke u zavisnosti o vremenu dobiva se iz (2.59) nakon određivanja koeficijenata a_n i b_n pomoću (2.58), (2.60) te $\mathcal{H}(c) = c \operatorname{tg} \beta$ koji vrijedi za klinasta tijela:

$$c(t) = \frac{Vt}{\operatorname{tg} \beta} \int_0^{\infty} \frac{A dp}{\left(\int_0^p \left(\frac{w^2}{w^2 + 1} \right)^{\vartheta} dw + A \right)^2} \quad (2.65)$$

Nakon određivanja trenutnog položaja kontaktne točke (2.65) pomoću (2.64) i (2.62) može se odrediti raspodjela potencijala za proizvoljni trenutak t te je time problem riješen. Raspodjela tlaka na oplakanoj površini dobiva se iz (2.61):

$$\frac{p}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{2f_0}{A \operatorname{tg} \beta} \left[\left(\frac{1-q^2}{q^2} \right)^\vartheta \int_{|q|}^1 \left(\frac{w^2}{1-w^2} \right)^\vartheta dw - q \right] - \left(\frac{1-q^2}{q^2} \right)^{2\vartheta} - 2f_0 + 1 \quad (2.66)$$

Tijela kružnog poprečnog presjeka

Kod rješavanja problema prodiranja tijela kružnog presjeka polumjera R sve dimenzije se normaliziraju u odnosu na polumjer uzimajući da je $R = 1$. U tom slučaju donja polovica kružnog tijela može se opisati preko funkcije dubine prodiranja $h(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$. U nekom trenutku t dvostruko tijelo sastoji se od dva segmenta kružnice širine $2c$ i visine $2h(c)$.

Rješenje problema dobiva se dvostrukim konformnim preslikavanjem iz domene dvostrukog tijela Z u kompleksnu ravninu w :

$$Z = -\frac{ic}{\operatorname{tg} \bar{w}} \quad w = -\frac{ic\nu}{\sin(\nu \bar{w})} \quad (2.67)$$

gdje je $\bar{w} = \bar{p} + i\bar{q}$ pomoćna kompleksna domena, a ν bezdimenzijski koeficijent:

$$\nu = \frac{\pi/2}{\operatorname{arctg} \left(\frac{c}{1 - \sqrt{1-c^2}} \right)}$$

Potencijal brzine ima sljedeći oblik:

$$\Phi(Z, t) = \operatorname{Re} \{ -iVw \} \quad (2.68)$$

Tijela s presjecima karakterističnih brodskih formi

Kod tijela čiji presjeci imaju oblik karakteristične brodske forme rješenje problema dobiva se pomoću Lewisovih formi [44]. Uronjena površina tijela aproksimira se sljedećom funkcijom:

$$Z_0(t) = H(t) \sum_{n=1}^3 A_n e^{i(3-2n)\theta} \quad \theta \in [\pi, 2\pi] \quad (2.69)$$

gdje $H(t) = \mathcal{H}(c(t))$ uronjeni gaz tijela, a A_1 , A_2 i A_3 bezdimenzijski koeficijenti definirani sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} (\Lambda + 1) - A_3 \\ A_2 &= \frac{1}{2} (\Lambda - 1) \\ A_3 &= -\frac{1}{4} (\Lambda + 1) + \frac{1}{4} \sqrt{(\Lambda + 1)^2 + 8\Lambda \left(1 - \frac{4\zeta}{\pi} \right)} \end{aligned} \quad (2.70)$$

gdje su $\Lambda \equiv \frac{c}{H}$ te $\varsigma \equiv \frac{A_{\text{op}}}{2cH}$, a A_{op} predstavlja površinu uronjenog dijela po-prečnog presjeka tijela. Uz ovako aproksimirano tijelo, strujanje u Z ravnini može se preslikati u uniformno vertikalno strujanje oko kružnice jediničnog polumjera u ravnini w pomoću sljedećeg preslikavanja:

$$\frac{Z}{H(t)} = \sum_{n=1}^3 A_n w^{3-2n} \quad (2.71)$$

Potencijal brzine računa se iz sljedeće relacije:

$$\Phi(Z, t) = \text{Re} \left\{ -i A_1 V H \left(w - \frac{1}{w} \right) \right\} \quad (2.72)$$

2.4. Lokalno rješenje oko kontaktne točke

Potencijalno strujanje u poopćenom Wagnerovom modelu može se na lokalnoj razini problema, u blizini kontaktne točke, promatrati kao vanjsko kutno strujanje čiji je unutarnji kut $2\beta < \pi$. Takav pristup analogan je osnovnom Wagnerovom modelu u kojemu se strujanje oko prodirućeg tijela zamjenjuje strujanjem oko ravne ploče čija širina se mijenja u vremenu ovisno o položaju kontaktnih točaka.

U općem slučaju potencijalno strujanje u kutovima u kartezijskim koordinatama opisuje se kompleksnim potencijalom sljedećeg oblika:

$$w(x, y) = Cz^n \quad \text{Kartezijske koordinate} \quad (2.73)$$

$$w(r, \theta) = Cr^n e^{in\theta} \quad \text{polarne koordinate} \quad (2.74)$$

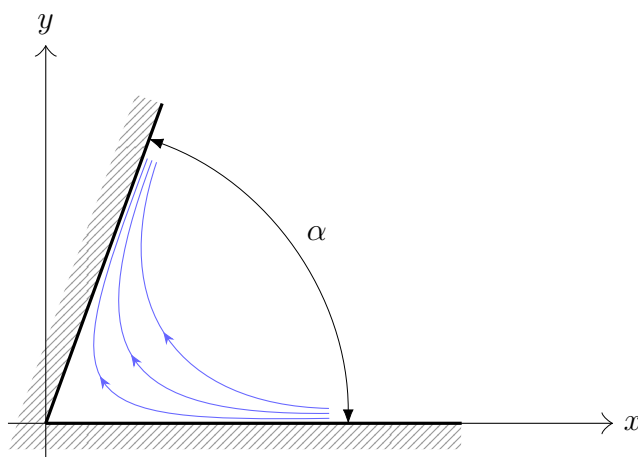
gdje je $C \in \mathbb{R}$ konstanta, $n \in \mathbb{R}$ parametar ovisan o kutu α koji omeđuju dvije krute granice unutar kojih se odvija strujanje:

$$n = \frac{\pi}{\alpha} \quad (2.75)$$

Iz kompleksnog potencijala u polarnim koordinatama mogu se na jednostavni način izvući potencijal brzine odnosno funkcija toka:

$$\begin{aligned} \phi &= Cr^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi\theta}{\alpha} \\ \psi &= Cr^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi\theta}{\alpha} \end{aligned} \quad (2.76)$$

Ovisno o vrijednosti parametra n strujanje može biti različito. U slučaju da vrijedi $\frac{1}{2} < n < 1$ egzistira vanjsko strujanje oko ugla. U ovom slučaju vrijednost kuta α je veća od π ($\alpha > \pi$) [45, 46].



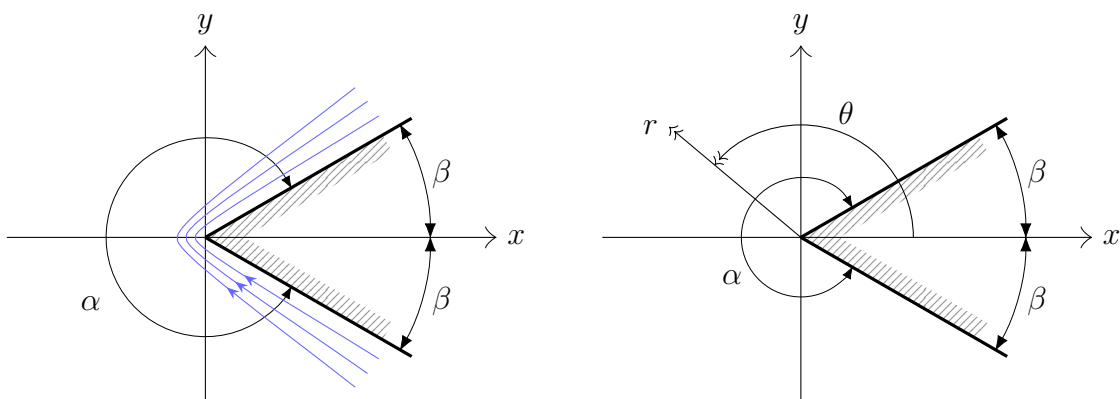
Slika 2.10: Skica strujanja unutar dviju krutih granica

2.4.1. Vanjsko potencijalno strujanje oko konveksnih klinova

Vanjsko strujanje oko lijevo orijentiranog konveksnog klina definirano je pomoću sljedećih izraza za potencijal brzine odnosno funkciju toka:

$$\begin{aligned}\phi &= Cr^{\frac{\pi}{2} \frac{1}{\pi-\beta}} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{\pi-\beta} (\theta - \beta)\right) \\ \psi &= Cr^{\frac{\pi}{2} \frac{1}{\pi-\beta}} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{\pi-\beta} (\theta - \beta)\right)\end{aligned}\tag{2.77}$$

gdje je β polovina unutarnjeg kuta ugla (Slika 2.11), a r i θ varijable koje mogu imati vrijednosti $r \in [0, \infty)$, odnosno $\theta \in \langle \beta, 2\pi - \beta \rangle$.



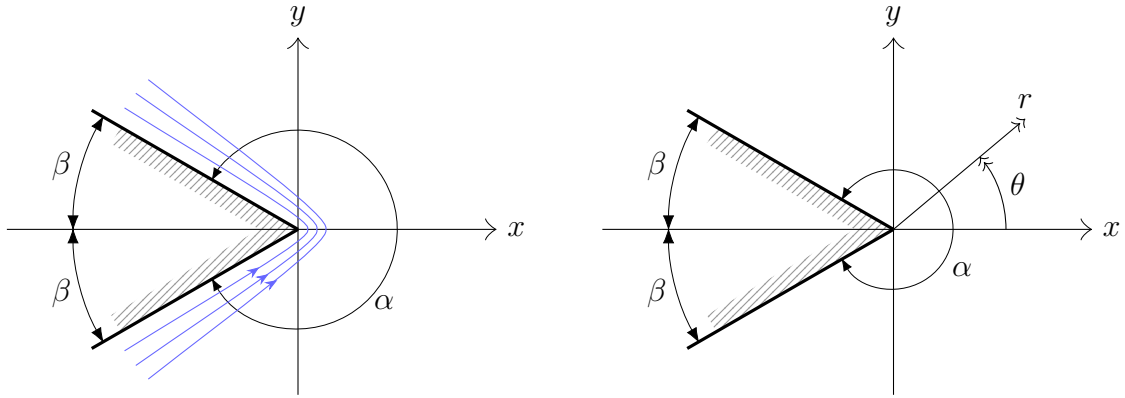
Slika 2.11: Vanjsko strujanje oko lijevo orijentiranog konveksnog klina

Vanjsko strujanje oko desno orijentiranog konveksnog klina definirano je pomoću

sljedećih izraza za potencijal brzine odnosno funkciju toka:

$$\begin{aligned}\phi &= Cr^{\frac{\pi}{2} \frac{1}{\pi-\beta}} \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{\pi-\beta} (\pi - \theta - \beta) \right) \\ \psi &= Cr^{\frac{\pi}{2} \frac{1}{\pi-\beta}} \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{\pi-\beta} (\pi - \theta - \beta) \right)\end{aligned}\quad (2.78)$$

gdje je β polovina unutarnjeg kuta ugla (Slika 2.12), a r i θ varijable koje mogu imati vrijednosti $r \in [0, \infty)$, odnosno $\theta \in \langle \beta - \pi, \pi - \beta \rangle$.



Slika 2.12: Vanjsko strujanje oko desno orijentiranog konveksnog klina

2.4.2. Singularno ponašanje funkcije brzine fluida

Deriviranjem potencijala ili funkcije toka po varijablama r odnosno θ dobivaju se komponente brzine. Uzimanjem potencijalnog strujanja oko lijevo orijentiranog konveksnog klina radijalna brzina fluida ima oblik:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = C \frac{\pi}{2} \frac{1}{\pi - \beta} r^{\frac{\pi}{2} \frac{1}{\pi - \beta} - 1} \cos \left[\frac{\pi}{2} \frac{1}{\pi - \beta} (\theta - \beta) \right] \quad (2.79)$$

Na površini tijela radijalna brzina računa se uvrštavanjem konkretnih vrijednosti pojedinih varijabli ($r \in \langle 0, +\infty \rangle, \theta = \beta$). U tom slučaju vrijedi:

$$\phi = Cr^{\frac{\pi}{2} \frac{1}{\pi - \beta}} \quad (2.80)$$

$$v_r = C \frac{\pi}{2} \frac{1}{\pi - \beta} r^{\frac{\pi}{2} \frac{1}{\pi - \beta} - 1} \quad (2.81)$$

Prethodni izrazi za potencijal brzine (2.80) i radijalnu brzinu fluida (2.81) mogu se zapisati u jednostavnijem obliku uvođenjem novih varijabli κ i $\bar{\kappa}$:

$$\phi = Cr^{\kappa} \quad (2.82)$$

$$v_r = C \frac{\kappa}{r^{\bar{\kappa}}} \quad (2.83)$$

S obzirom da za konveksni klin vrijedi $\beta < \frac{\pi}{2}$ novo uvedene varijable mogu poprimiti sljedeće vrijednosti:

$$\kappa = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\pi - \beta} < 1 \quad (2.84)$$

$$\bar{\kappa} = - \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{\pi - \beta} - 1 \right) > 0 \quad (2.85)$$

U slučaju da $r \rightarrow 0$, radijalna brzina iz (2.83) teži ka ∞ , što znači da je kontaktnoj točki funkcija brzine singularna.

2.4.3. Funkcija konstante lokalnog rješenja

Funkcije koje opisuju potencijal i radijalnu brzinu strujanja sastoje se od dva dijela: konstante C koja ovisi o brzini fluida koji nailazi na konveksni klin iz beskonačnosti v_∞ i preostalog dijela koji ovisi samo o geometrijskim varijablama r odnosno β .

Geometrijski dijelovi funkcija potencijala i radijalne brzine mogu se izdvojiti u posebne funkcije f_p odnosno f_{rb} :

$$f_p = r^\kappa \quad (2.86)$$

$$f_{rb} = \kappa r^{\kappa-1} \quad (2.87)$$

gdje je κ definirana izrazom (2.84).

S obzirom na sličnost lokalnog strujanja oko kontaktne točke kod poopćenog Wagnerovog pristupa i strujanja oko konveksnog klina vrijednost konstante C u okolini kontaktne točke može se izraziti pomoću njene vrijednosti za vanjsko strujanje oko konveksnog klina. U tu svrhu definiraju se funkcije konstante lokalnog rješenja za potencijal brzine na oplakanoj površini tijela:

$$K_{op} = \frac{\phi}{f_p} \quad (2.88)$$

odnosno funkcija konstante lokalnog rješenja za brzinu strujanja na slobodnoj površini:

$$K_{sp} = \frac{\partial \phi / \partial y}{f_{rb}} \quad (2.89)$$

U kontaktnoj točki vrijednosti obje funkcije konstante lokalnog rješenja konvergiraju prema istoj vrijednosti.

3. Poopćena Wagnerova metoda

Metoda koju su u svom radu predložili Zhao, Faltinsen i Aarsnes (1996) [22] naziva se i osnovna poopćena Wagnerova metoda s obzirom da je to bio prvi pokušaj poopćavanja Wagnerovog rješenja (1932) [11] kojim se nastojalo pojednostavniti matematsko opisivanje slobodne površine u numeričkom modelu prodiranja tijela kroz tekućinu.

U prethodnom svom radu Zhao i Faltinsen (1993) [21] predstavili su potpuno nelinearni numerički model rješavanja simetričnog prodiranja dvodimenzionalnog tijela u kojem su i oplakana i slobodna površina opisane egzaktnim rubnim uvjetima, a numeričko rješenje je dobiveno primjenom metode rubnih elemenata. U ranije spomenutom radu [22] nelinearni model su proširili na nesimetrično prodiranje i uveli mogućnost računanja neviskoznog odvajanja strujanja.

Nelinearni model pokazao se vrlo dobrim u pogledu opisa slobodne površine, nelinearnog odvajanja strujanja i ukupne sile na tijelo u usporedbi s eksperimentalnim istraživanjima kao što su ona Greenhova i Lina (1983) [29] te Aarsnesa (1996) [23]. Ipak, složenost matematskog numeričkog modela u dijelu zadovoljavanja rubnih uvjeta na slobodnoj površini i pri pomicanju iste između dva vremenska koraka te skupoća u pogledu ukupnog trajanja proračuna čini nelinearni model nepraktičnim u usporedbi s postojećim jednostavnijim modelima.

3.1. Formulacija problema poopćene Wagnerove metode

Problem se rješava kao problem početnih vrijednosti pri čemu se u svakom vremenskom trenutku t rješava osnovna jednačba (2.45) uz zadovoljavanje rubnih uvjeta (2.46) i (2.48).

Primjenom Greenovog trećeg identiteta Laplaceova jednačba (2.45) svodi se na Fredholmovu integralnu jednačbu druge vrste:

$$\varkappa \phi(x, y) = \int_{\mathcal{S}} \left[\frac{\partial \phi(\xi, \eta)}{\partial n(\xi, \eta)} G(x, y; \xi, \eta) - \phi(\xi, \eta) \frac{\partial G(x, y; \xi, \eta)}{\partial n(\xi, \eta)} \right] d\mathcal{S}(\xi, \eta) \quad (3.1)$$

gdje $G(x, y; \xi, \eta)$ predstavlja Greenovu funkciju, (x, y) je točka unutar (\mathcal{D}) ili na rubu (\mathcal{S}) domene, (ξ, η) točka na rubu domene \mathcal{S} , a \varkappa parametar čija vrijednost ovisi o tome gdje se točka (x, y) nalazi. Mogući su sljedeći slučajevi:

$$\varkappa = \begin{cases} 1 & (x, y) \in \mathcal{D} \\ \frac{1}{2} & (x, y) \in \mathcal{S} \\ 0 & (x, y) \notin \mathcal{D} \end{cases} \quad (3.2)$$

Rub domene \mathcal{S} sastoji se od oplakane površine tijela \mathcal{S}_{op} , slobodne površine tekućine \mathcal{S}_{sp} te kontrolne površine \mathcal{S}_{∞} na dovoljno velikoj udaljenosti od tijela:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{sp}} + \mathcal{S}_{\text{op}} + \mathcal{S}_{\infty}$$

Kontrolna površina postavlja se na dovoljno velikoj udaljenosti od tijela tako da je integral po njenom rubu u jednadžbi (3.1) jednak nuli.

Greenova funkcija je pomoćna funkcija koja se koristi u rješavanju rubnih problema te mora zadovoljavati osnovnu jednadžbu problema (u ovom slučaju Laplaceova jednadžba). U teoriji postoji beskonačno mnogo funkcija koje zadovoljavaju Laplaceovu jednadžbu tako da postoje brojne verzije Greenove funkcije koje se koriste u hidrodinamičkim proračunima. Vrlo detaljan pregled dan je od strane Wehausena i Latoinea [47].

Najčešći izbor Greenove funkcije, koji će se koristiti i ovdje, je osnovno ili fundamentalno rješenje Laplaceove jednadžbe. Osnovno rješenje naziva se i Rankinova Greenova funkcija te na dvodimenzionalnoj domeni ima sljedeći oblik:

$$\begin{aligned} G(x, y; \xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \\ G(x, y; \xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \ln r(x, y; \xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Izraz (3.1) sastoji se od dvije integralne jednadžbe s različitim jezgrama koje čine Greenova funkcija $G(x, y; \xi, \eta)$ i derivacija Greenove funkcije u smjeru normale na plohu $\frac{\partial G(x, y; \xi, \eta)}{\partial n(\xi, \eta)}$. Ovisno o dijelu ruba domene po kojem se integrira ulogu nepoznatih funkcija preuzima ili potencijal brzine $\phi_j(\xi, \eta)$ ili brzina u smjeru normale na plohu $\frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial n(\xi, \eta)}$.

S obzirom da se kod problema prodiranja tijela razmatraju vrijednosti potencijala brzine samo na rubovima domene (odnosno oplakanoj i slobodnoj površini) tj. točka (x, y) pripada rubu domene, u skladu s (3.2) vrijedi sljedeće:

$$\kappa = \frac{1}{2}$$

Uzimajući u obzir oblik Greenove funkcije (3.3) te vrijednost konstante κ te uvođenjem oznaka $P = (x, y)$ i $Q = (\xi, \eta)$ za točke na rubu domene, integralna jednadžba (3.1) poprima sljedeći oblik:

$$\pi \phi(P) = \int_{\mathcal{S}} \left[\frac{\partial \phi(Q)}{\partial n(Q)} \ln r(P; Q) - \phi(Q) \frac{\partial \ln r(P; Q)}{\partial n(Q)} \right] d\mathcal{S}(Q) \quad (3.4)$$

3.2. Rješavanje metodom rubnih elemenata

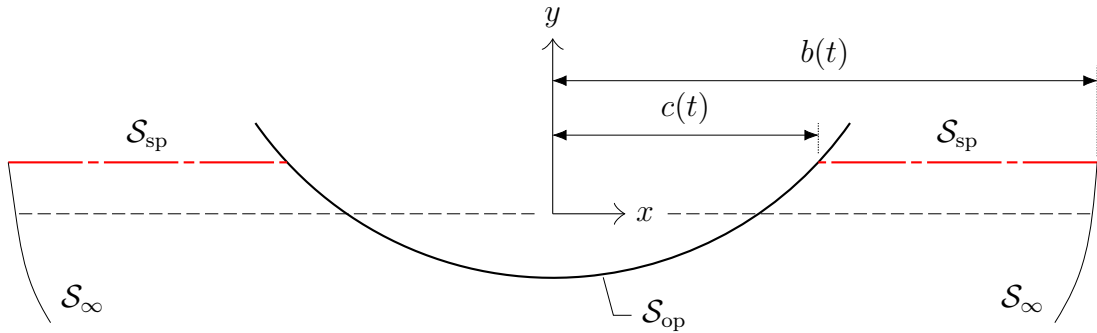
Približno rješenje jednadžbe (3.4) traži se metodom rubnih elemenata korištenjem kolokacijskog pristupa (Dodatak B). Rub domene podijeli se na N segmenata

odnosno rubnih elemenata. Nepoznate funkcije potencijala i brzine fluida aproksimiraju se funkcijama ϕ_n odnosno $\frac{\partial \phi_n}{\partial n}$:

$$\begin{aligned}\phi_n(s) &= \sum_{j=1}^N \phi_j \lambda_j(s), \quad s \in \mathcal{S} \\ \frac{\partial \phi_n(s)}{\partial n} &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \lambda_j(s), \quad s \in \mathcal{S} \\ \lambda_j(s) &= \begin{cases} 1 & \text{za } s \in \mathcal{S}_j \\ 0 & \text{inače} \end{cases}\end{aligned}\tag{3.5}$$

gdje su ϕ_j i $\frac{\partial \phi_j}{\partial n}$ koeficijenti, $\lambda_j = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ bazne funkcije te \mathcal{S}_j domena segmenta odnosno rubnog elementa j .

S obzirom na odabrani tip baznih funkcija (3.5) traženi koeficijenti ϕ_j na oplakanoj površini te $\frac{\partial \phi_j}{\partial n}$ na slobodnoj površini imaju konstantnu vrijednost duž segmenta. Koordinate točaka P i Q u kojima se računaju vrijednosti koeficijenata nalaze se u kolokacijskim točkama segmenta (Slika 3.2). Na jednaki način se primjenjuju i rubni uvjeti na slobodnoj površini (2.48) odnosno oplakanom dijelu tijela (2.46).



Slika 3.1: Domena strujanja u numeričkom proračunu

Nakon definiranja aproksimacijske funkcije (3.5) integralna jednadžba (3.4) zapisuje se u obliku pogodnom za numeričko rješavanje:

$$\begin{aligned}\pi \phi_i(x, y) &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial n(\xi, \eta)} \int_{\mathcal{S}_j} \ln r d\mathcal{S}_j - \sum_{j=1}^N \phi_j(\xi, \eta) \int_{\mathcal{S}_j} \frac{\partial \ln r}{\partial n(\xi, \eta)} d\mathcal{S}_j \\ &\quad i = 1, \dots, N\end{aligned}\tag{3.6}$$

Iz (3.6) proizlazi da se vrijednost koeficijenta ϕ_i na desnoj strani jednadžbe u svakoj pojedinoj točki P izražava preko sume produkta koeficijenata i pripadnih integrala po svim točkama Q ruba domene uključujući i točku $Q = P$. Integrali na desnoj strani nazivaju se i utjecajni koeficijenti s obzirom da pokazuju koliko svaka pojedina kolokacijska točka Q utječe na vrijednost nepoznate funkcije u P .

S obzirom da vrijedi:

$$\phi_i(x, y) = \phi_j(\xi, \eta) \quad \text{za } i = j,$$

prebacivanjem drugog člana s desne na lijevu stranu jednadžba (3.6) prelazi u:

$$\sum_{j=1}^N \underbrace{\left[2\pi\delta_{ij} + \int_{\mathcal{S}_j} \frac{\partial \ln r}{\partial n(\xi, \eta)} d\mathcal{S}_j \right]}_A \phi_j(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^N \underbrace{\left(\int_{\mathcal{S}_j} \ln r d\mathcal{S}_j \right)}_B \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial n(\xi, \eta)} \quad (3.7)$$

gdje je δ_{ij} Kronecker delta. U skraćenom obliku jednadžba (3.7) ima oblik:

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{v} \quad (3.8)$$

gdje su \mathbf{A} i \mathbf{B} matrice dimenzija $(N \times N)$, a \mathbf{u} i \mathbf{v} vektori dimenzija $(N \times 1)$. U općem slučaju ukupni broj nepoznanica je dvostruko je veći od broja jednadžbi N . Broj nepoznanica svodi se na broj jednadžbi postavljanjem odgovarajućih rubnih uvjeta. Ovdje su poznate vrijednosti potencijala brzine na slobodnoj površini tekućine i vrijednosti brzina na oplakanoj površini tijela tako da sustav jednadžbi (3.8) postaje rješiv.

Podjelom ukupnog broja segmenata N na dva dijela

$$\begin{array}{ll} 1, \dots, k & \text{segmenti na slobodnoj površini } (\mathcal{S}_{\text{sp}}) \\ k+1, \dots, N & \text{segmenti na uronjenoj površini tijela } (\mathcal{S}_{\text{op}}) \end{array}$$

te uvrštavanjem odgovarajućih rubnih uvjeta jednadžba (3.7) poprima oblik:

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^k \frac{\partial \phi(\xi, \eta)}{\partial n(\xi, \eta)} \int_{\mathcal{S}_j} \ln r d\mathcal{S}_j + \sum_{j=k+1}^N \left[2\pi\delta_{ij} + \int_{\mathcal{S}_j} \frac{\partial \ln r}{\partial n(\xi, \eta)} d\mathcal{S}_j \right] \phi_j(\xi, \eta) = \\ \sum_{j=k+1}^N V n_y(\xi, \eta) \int_{\mathcal{S}_j} \ln r d\mathcal{S}_j \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.2.1. Određivanje doprinosa slobodne površine za $|x| \rightarrow \infty$

Za potpuno formuliranje problema potrebno je uzeti u obzir doprinos slobodne površine na rubu kada $|x| \rightarrow \infty$. U tu svrhu uvodi se nova funkcija ovisna samo o vremenu $b = b(t)$ koja predstavlja horizontalnu udaljenost od ishodišta na kojoj se može primijeniti radijacijski uvjet u beskonačnosti. Doprinos se razmatra za područje $|x| > b(t)$. Vrijednost funkcije b u pojedinom vremenskom trenutku trebala bi biti dovoljno velika u usporedbi sa značajnom dimenzijom problema L koja se definira na sljedeći način:

$$L = \max(c(t), h(t))$$

Strujanje na slobodnoj površini u području $|x| > b(t)$ opisuje se dipolom s vertikalno usmjerenom osi čiji potencijal brzine je:

$$\phi(x, y) \simeq M(t) \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (3.10)$$

gdje funkcija $M = M(t)$ ima konstantne vrijednosti u pojedinim vremenskim trenucima.

Uvrštavanjem (3.10) u jednadžbu (3.4) može se analitički izračunati doprinos slobodne površine kada $|x| \rightarrow \infty$. Kod dvodimenzionalnih problema rubno područje slobodne površine sastoji se od lijeve i desne strane:

$$\mathcal{S}_{\text{sp}\infty} = \langle -\infty, -b(t) \rangle \cup [b(t), +\infty) \quad (3.11)$$

Također, može se smatrati da na rubnom dijelu slobodna površina ostaje neporemećena, tj. zadržava oblik mirujućeg položaja koji vrijedi za $t = 0$. Dakle, na rubnom dijelu vertikalna koordinata i normala na površinu su:

$$\begin{aligned} \eta &= 0 \\ \vec{n} &= (0, -1) \end{aligned}$$

Derivacija potencijala vertikalnog dipola u smjeru normale $\vec{n} = (0, -1)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(\xi, 0)}{\partial n} &= \nabla \phi(\xi, 0) \cdot \vec{n} \\ \frac{\partial \phi(\xi, 0)}{\partial n} &= M(t) \frac{1}{\xi^2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

U konačnici, nakon uvrštavanja (3.10), (3.12) u desnu stranu jednadžbe (3.4) te uz $\eta = 0$ i $\vec{n} = (0, 1)$, utjecaj rubnog dijela slobodne površine izražava se sljedećim integralom:

$$I_{\text{sp}\infty} = - \int_{\mathcal{S}_{\text{sp}\infty}} \frac{M(t)}{\xi^2} \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} \quad (3.13)$$

gdje ξ poprima vrijednosti od $-\infty$ do $-b(t)$, odnosno od $b(t)$ do $+\infty$. Rješavanjem integrala (3.13) dobiva se doprinos ruba slobodne površine za $\xi \in \langle -\infty, -b(t) \rangle$:

$$\begin{aligned} I_{\text{sp}\infty} \Big|_{-\infty}^{-b(t)} &= \frac{1}{b} \ln \sqrt{(b+x)^2 + y^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} \ln \frac{1}{b} \sqrt{(b+x)^2 + y^2} + \\ &\quad \frac{y}{x^2 + y^2} \left[\frac{\pi}{2} \text{sign}(y) - \arctan \left(\frac{b+x}{y} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

odnosno za $\xi \in [b(t), +\infty)$:

$$\begin{aligned} I_{\text{sp}\infty} \Big|_{b(t)}^{+\infty} &= \frac{1}{b} \ln \sqrt{(b-x)^2 + y^2} - \frac{x^2}{x^2 + y^2} \ln \frac{1}{b} \sqrt{(b-x)^2 + y^2} + \\ &\quad \frac{y}{x^2 + y^2} \left[\frac{\pi}{2} \text{sign}(y) - \arctan \left(\frac{b-x}{y} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Radi jednostavnosti uvode se posebne oznake:

$$K_L = I_{\text{sp}\infty} \Big|_{-\infty}^{-b(t)} \quad K_R = I_{\text{sp}\infty} \Big|_{b(t)}^{+\infty} \quad (3.16)$$

gdje indeks L označava doprinos lijeve, a R desne strane rubnog dijela slobodne površine.

Vrijednost varijable $M(t)$ u pojedinom vremenskom trenutku određuje se iz uvjeta da na pozicijama $(-b(t), 0)$, odnosno $(b(t), 0)$ vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{(-b(t), 0)} &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{j=1} \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{(+b(t), 0)} &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{j=N_{sp}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

gdje su $j = 1$, odnosno $j = N_{sp}$ oznake za prvi, odnosno zadnji element na slobodnoj površini.

Uvrštavanjem $(-b(t), 0)$, odnosno $(b(t), 0)$ u (3.12) dobiva se:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{(-b(t), 0)} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{(+b(t), 0)} = M(t) \frac{1}{b^2},$$

iz čega slijedi:

$$M(t) = b^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{j=1} = b^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{j=N_{sp}} \quad (3.18)$$

Sada je prikladnije ukupni broj segmenata podijeliti u tri skupine:

$$i = \begin{cases} 1, \dots, k & \text{segmenti na slobodnoj površini (lijevo)} \\ k+1, \dots, m & \text{segmenti na oplakanoj površini tijela} \\ m+1, \dots, N & \text{segmenti na slobodnoj površini (desno)} \end{cases}$$

Na kraju, jednadžba (3.9) poprima konačan izgled, pogodan za numeričko rješavanje:

$$\begin{aligned} & - \left(b^2 K_L + \int_{S_1} \ln r dS_1 \right) \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \sum_{j=2}^k \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \int_{S_j} \ln r dS_j + \\ & \sum_{j=k+1}^m \left[\pi \delta_{ij} + \int_{S_j} \frac{\partial \ln r}{\partial n} dS_j \right] \phi_j - \sum_{j=m+1}^{N-1} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \int_{S_j} \ln r dS_j - \\ & \left(b^2 K_R + \int_{S_N} \ln r dS_N \right) \frac{\partial \phi_n}{\partial n} = V n_{yj} \sum_{j=k+1}^m \int_{S_j} \ln r dS_j \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.2.2. Utjecajni koeficijenti

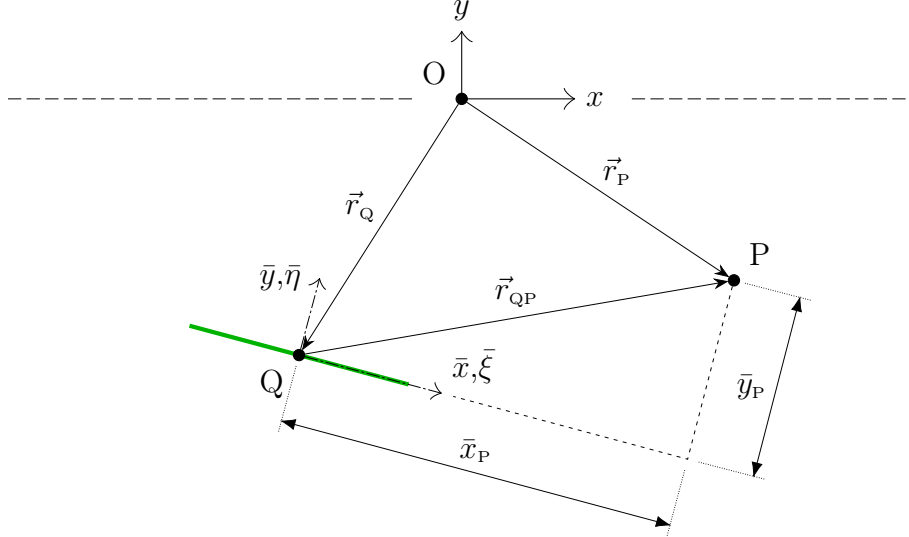
U jednadžbi (3.19) javljaju se dva tipa integrala koje treba riješiti analitički ili numerički:

$$\int_{S_j} \ln r dS_j \quad \text{i} \quad \int_{S_j} \frac{\partial \ln r}{\partial n} dS_j$$

Integracija se vrši duž krivulje koja opisuje pojedini segment, a s obzirom na oblik podintegralnih funkcija za oba tipa integrala postoje analitička rješenja.

Parametrizacija segmente krivulje

Podintegralne funkcije definirane su u ovisnosti o varijablama x, y, ξ, η u proračunskom koordinatnom sustavu tijela te ih je potrebno parametrizirati duž krivulje segmenta. Kako je Greenova funkcija Rankinovog tipa parametrizacija se može napraviti u lokalnom koordinatnom sustavu segmenta.



Slika 3.2: Parametrizacija segmenta i položaj točaka P i Q u proračunskom i segmentnom koordinatnom sustavu

Općenito, krivuljni integral neke funkcije $g : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ duž po dijelovima glatkoj krivulji $C \subset S$ definira se na sljedeći način:

$$\int_C g du = \int_a^b g(f_s(s)) |f'_s(s)| ds \quad (3.20)$$

gdje je $f_s : [a, b] \rightarrow C$ proizvoljna bijektivna funkcija koja parametrizira krivulju C pri čemu $f_s(a)$ i $f_s(b)$ predstavljaju krajnje točke krivulje C , a $|f'_s(s)|$ apsolutna vrijednost derivacije parametarske funkcije.

Osi u lokalnom koordinatnom sustavu segmenta označavaju se crticom iznad slovne oznake (npr. \bar{x} , slika (3.2)). Koordinate $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ opisuju točke duž segmentne krivulje, a (\bar{x}, \bar{y}) točke izvan segmenta. Najčešći izbor krivulje kojom se opisuje segment je pravac koji prolazi kroz dvije definicijske točke smještene na njegovim krajnjim rubovima čija parametarska jednadžba u $O \bar{\xi} \bar{\eta}$ ima oblik:

$$f_s(s) = \begin{cases} \bar{\xi} = s \\ \bar{\eta} = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

Apsolutna vrijednost derivacije parametarske funkcije tada je:

$$|f'_s(s)| = \sqrt{\left(\frac{d\bar{\xi}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{\eta}}{ds}\right)^2} = 1 \quad (3.22)$$

Kolokacijska točka segmenta duljine l_s smješta se na sredinu dužine koja povezuje definicijske točke. Vrijednost varijable s u kolokacijskoj točki jednaka je 0, dok je u definicijskim točkama jednaka $-\frac{l}{2}$ odnosno $\frac{l}{2}$.

Parametrizacija podintegralnih funkcija

Nakon premreživanja domene položaj točaka P i Q izražen je u proračunskom koordinatnom sustavu tijela Oxy . Pri parametrizaciji podintegralnih funkcija utjecajnih koeficijenata potrebno je međusobni položaj točaka P i Q izraziti u segmentnom koordinatnom sustavu $O\bar{\xi}\bar{\eta}$.

Ako O označava ishodište proračunskog koordinatnog sustava Oxy (slika 3.2), a \vec{r}_P i \vec{r}_Q vektore položaja točaka P odnosno Q u Oxy tada se položaj točke Q u odnosu na P definira vektorom:

$$\vec{r}_{QP} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q \quad (3.23)$$

Komponente vektora \vec{r}_{QP} u $O\bar{\xi}\bar{\eta}$:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \vec{r}_{QP} \cdot \vec{t} \\ \bar{y} &= \vec{r}_{QP} \cdot \vec{n} \end{aligned} \quad (3.24)$$

gdje su \vec{t} i \vec{n} vektori tangente i normale segmentne krivulje u kolokacijskoj točki izraženi u segmentnom koordinatnom sustavu:

$$\begin{aligned} \vec{t} &= (1, 0) \\ \vec{n} &= (0, -1) \end{aligned}$$

Derivacija funkcije $\ln r$ u smjeru normale segmenta izražena u $O\bar{\xi}\bar{\eta}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln r}{\partial n} &= \nabla \ln r \cdot \vec{n}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \\ &= n_{\bar{\xi}} \frac{\partial \ln r}{\partial \bar{\xi}} + n_{\bar{\eta}} \frac{\partial \ln r}{\partial \bar{\eta}} \\ &= \frac{\bar{y}}{(\bar{x} - s)^2 + \bar{y}^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Analitička rješenja integrala

Analitičko rješenje integrala prvog tipa:

$$\begin{aligned} \int_{S_j} \ln r dS_j &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \ln \sqrt{(\bar{x} - s)^2 + \bar{y}^2} ds \\ &= -l + y \left(\arctg \left[\frac{2\bar{x} + l}{2\bar{y}} \right] - \arctg \left[\frac{2\bar{x} - l}{2\bar{y}} \right] \right) + \\ &\quad \frac{1}{2} \left(\left(\bar{x} + \frac{l}{2} \right) \ln \left[\left(\bar{x} + \frac{l}{2} \right)^2 + \bar{y}^2 \right] - \left(\bar{x} - \frac{l}{2} \right) \ln \left[\left(\bar{x} - \frac{l}{2} \right)^2 + \bar{y}^2 \right] \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Analitičko rješenje integrala drugog tipa:

$$\begin{aligned} \int_{S_j} \frac{\partial \ln r}{\partial n} dS_j &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\bar{y}}{(\bar{x} - s)^2 + \bar{y}^2} ds \\ &= \operatorname{arctg} \left[\frac{\bar{x} + \frac{l}{2}}{\bar{y}} \right] - \operatorname{arctg} \left[\frac{\bar{x} - \frac{l}{2}}{\bar{y}} \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

U slučaju da je $Q = P$ tada vrijedi $x = y = 0$. Integrali (3.26), odnosno (3.27) tada imaju sljedeći oblik:

$$\int_{S_j} \ln r dS_j = \frac{l}{2} \ln \frac{l^2}{4} - l \quad (3.28)$$

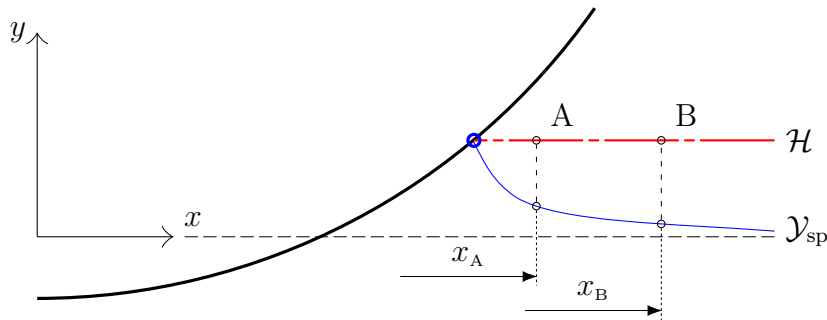
$$\int_{S_j} \frac{\partial \ln r}{\partial n} dS_j = 0 \quad (3.29)$$

3.3. Određivanje vremenskog koraka

Vremenski korak određuje se procjenom položaja kontaktne točke u sljedećem trenutku t_{i+1} te računanjem vremena koje je potrebno da se čestica tekućine pomakne u vertikalnom smjeru sa stvarne slobodne površine u t_i na poziciju kontaktne točke u t_{i+1} . Traženi pomak izražava se integracijom u vremenu funkcije relativne vertikalne brzine između tijela i čestice tekućine na slobodnoj površini.

Raspodjela brzina čestica tekućine na slobodnoj površini te potencijala na tijelu dobivaju se numeričkim rješavanjem jednadžbe (3.19). U skladu s načinom na koji je postavljen problem, brzine čestica tekućine dobivaju se za proračunsku slobodnu površinu. Pretpostavka metode je da brzine dobivene na proračunskoj slobodnoj površini \mathcal{H} odgovaraju brzinama na stvarnoj slobodnoj površini \mathcal{Y}_{sp} za istu horizontalnu poziciju x čestice fluida (Slika 3.3):

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{S_{sp}=\mathcal{H}} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\mathcal{Y}_{sp}} \quad (3.30)$$



Slika 3.3: Prikaz položaja čestica s istom vertikalnom brzinom na stvarnoj (\mathcal{Y}_{sp}) i proračunskoj (\mathcal{H}) slobodnoj površini

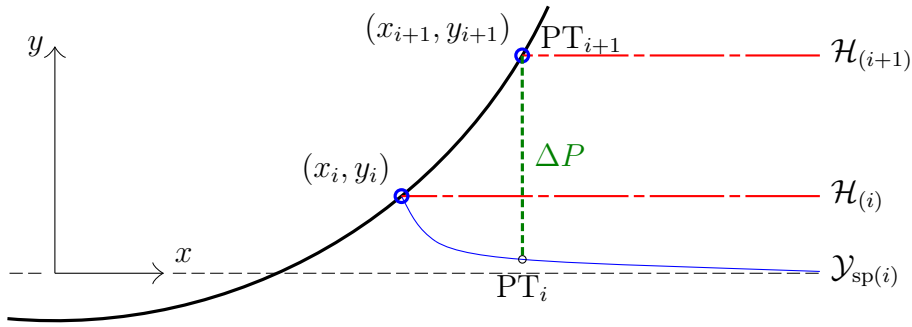
Određivanje položaja tijela i slobodne površine u trenutku t_{i+1} odvija se kroz nekoliko koraka:

- (i) pretpostavi se novi položaj kontaktne točke (x_{i+1}, y_{i+1}) za odabranu stranu domene u trenutku t_{i+1} ;
- (ii) riješi se problem (3.19) za novi položaj proračunske slobodne površine $\mathcal{H}_{(i+1)}$;
- (iii) računa se vrijeme u kojemu kontaktna točka prijeđe put iz prethodnog (t_i) u novi položaj (t_{i+1}) , tj. određuje se vremenski pomak $\Delta t = t_{i+1} - t_i$.

3.3.1. Simetrični uron tijela

Udaljenost (ΔP) između stvarne pozicije slobodne površine u trenutku t_i i kontaktne točke u trenutku t_{i+1} na istoj x koordinati može se izračunati integrirajući u vremenu relativnu vertikalnu brzinu točke W između položaja PT_i i PT_{i+1} (Slika 3.4):

$$\Delta P = \int_{t_i}^{t_{i+1}} W(c(t), x_{i+1}) dt \quad (3.31)$$



Slika 3.4: Definiranje udaljenosti ΔP

Relativna vertikalna brzina W ovisi o horizontalnoj dimenziji kontaktnog područja $c(t)$ koja se ovdje uzima kao nezavisna, dok je vrijeme t zavisna varijabla. Zamjenom zavisne s nezavisnom varijablom izraz (3.31) prelazi u:

$$\Delta P = \int_{x_i}^{x_{i+1}} W(c(t), x_{i+1}) \frac{dt}{dc} dc \quad (3.32)$$

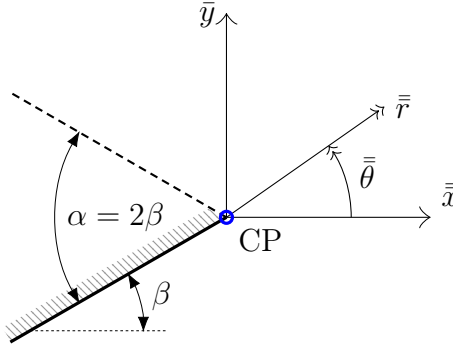
Promjenom integracijske varijable promijenile su se i granice integracije koja se sada proteže od horizontalne pozicije kontaktne točke x_i u t_i do x_{i+1} u t_{i+1} .

Integral (3.32) rješava se numerički uz pretpostavku da je poznata srednja vrijednost $\left(\frac{dt}{dc}\right)_m$ funkcije $\frac{dt}{dc}$. Izražavajući funkciju $\frac{dt}{dc}$ preko srednje vrijednosti izraz (3.32) prelazi u:

$$\Delta P = \left(\frac{dt}{dc}\right)_m \int_{x_i}^{x_{i+1}} W(c(t), x_{i+1}) dc \quad (3.33)$$

Relativna vertikalna brzina W definira se pomoću lokalnog rješenja u okolini kontaktne točke. U bliskoj okolini kontaktne točke strujanje je slično vanjskom

strujanju oko konveksnog klina s unutarnjim kutem α (Poglavlje 2.4.2.). Radi definiranja lokalne brzine strujanja uvode se Kartezijev $O \bar{x} \bar{y}$ i polarni $O \bar{r} \bar{\theta}$ koordinatni sustavi čije ishodište je smješteno u kontaktnoj točki (Slika 3.5). Rubni uvjet na slobodnoj površini zadovoljen je na osi \bar{x} ($\bar{y} = 0$). Pretpostavlja se da je vrijednost kuta α konstantna između dva vremenska trenutka t_i i t_{i+1} .



Slika 3.5: Skica okoline kontaktne točke

Prema Zhaou i sur. [22] za aproksimaciju vertikalne brzine W koristi se izraz za brzinu čestice fluida u radijalnom smjeru duž oplakane površine kod vanjskog kutnog strujanja oko konveksnog klina:

$$W = -D \frac{\pi}{2\pi - \alpha} \bar{r}^{\frac{\pi}{2\pi - \alpha} - 1} \quad (3.34)$$

gdje je D konstanta koja se određuje iz globalnog rješenja, a \bar{r} se definira na sljedeći način:

$$\bar{r} = x_{i+1} - c(t) \quad (3.35)$$

u kojem x_{i+1} predstavlja x koordinatu kontaktne točke u trenutku t_{i+1} , a $c(t)$ funkciju promjene x koordinate kontaktne točke u vremenu t .

Konstanta D određuje se iz (3.34) korištenjem vrijednosti brzina na slobodnoj površini u vremenskim trenucima t_i i t_{i+1} za $c = x_i$ odnosno $c = x_{i+1}$. Konačni iznos konstante dobiva se iz srednje vrijednosti oba koraka:

$$D_m = \frac{1}{2} (D_{t_i} + D_{t_{i+1}}) \quad (3.36)$$

Za izračunati vrijednost konstante D u t_i potrebno je (3.34) izraziti kao funkciju od D te uvrstiti poznate vrijednosti:

$$D_{t_i} = - \frac{2 - \frac{\beta}{\pi}}{(x_{i+1} - x_i)^{\frac{1}{2 - \frac{\beta}{\pi}} - 1}} W_{t_i} \quad (3.37)$$

gdje je W_{t_i} brzina čestice na slobodnoj površini u točki PT_i .

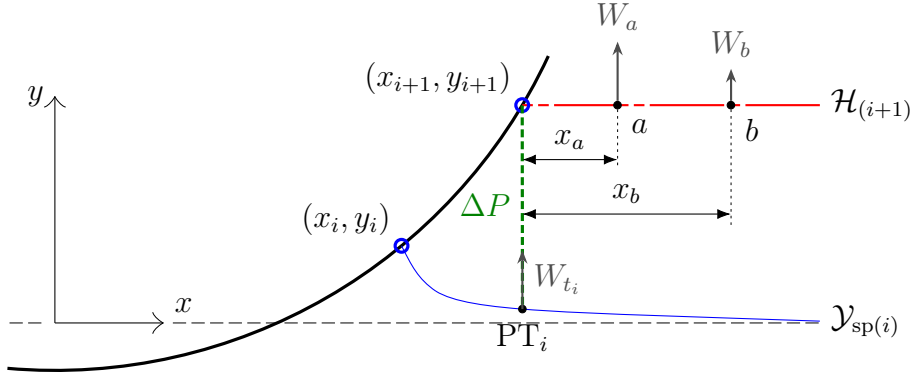
U trenutku t_{i+1} vrijednost konstante potrebno je izračunati u kontaktnoj točki. Zbog singularnosti brzine na slobodnoj površini u (x_{i+1}, y_{i+1}) konstanta $D_{t_{i+1}}$ određuje se linearnom ekstrapolacijom vrijednosti konstanti u dvije najbliže kolokacijske točke na $\mathcal{H}_{(i+1)}$:

$$D_{t_{i+1}} = D_a - \frac{D_b - D_a}{x_b - x_a} x_a \quad (3.38)$$

gdje se D_a odnosno D_b određuju iz relacije:

$$D_{a(b)} = -\frac{2 - \frac{\beta}{\pi}}{\left(x_{a(b)}\right)^{\frac{1}{2 - \frac{\beta}{\pi}} - 1}} W_{a(b)} \quad (3.39)$$

W_a i W_b su brzine čestica tekućine u kolokacijskim točkama proračunske slobodne površine $\mathcal{H}_{(i+1)}$ na udaljenosti x_a odnosno x_b od kontaktne točke.



Slika 3.6: Računanje vrijednosti D_m

Nakon uvrštavanja funkcije vertikalne brzine W (3.34) te uzimajući u obzir srednju vrijednost konstante D_m izraz (3.33) prelazi u:

$$\Delta P = -D_m \left(\frac{dt}{dc} \right)_m \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(x_{i+1} - c(t) \right)^{\frac{1}{2 - \frac{\beta}{\pi}} - 1} dc \quad (3.40)$$

Analitičkom integracijom izraz (3.40) prelazi u:

$$\Delta P = -D_m \left(\frac{dt}{dc} \right)_m \left(x_{i+1} - c(t) \right)^{\frac{1}{2 - \frac{\beta}{\pi}}} \quad (3.41)$$

Sada se na jednostavan način može dobiti izraz za računanje vrijednosti $\left(\frac{dt}{dc} \right)_m$:

$$\left(\frac{dt}{dc} \right)_m = -\frac{\Delta P}{D_m (x_{i+1} - x_i)^{\frac{1}{2 - \frac{\beta}{\pi}}}} \quad (3.42)$$

Vrijeme potrebno da čestica fluida prijeđe udaljenost od točke PT_i do točke PT_{i+1} :

$$\Delta t = \left(\frac{dt}{dc} \right)_m (x_{i+1} - x_i) \quad (3.43)$$

3.3.2. Nesimetrični uron tijela

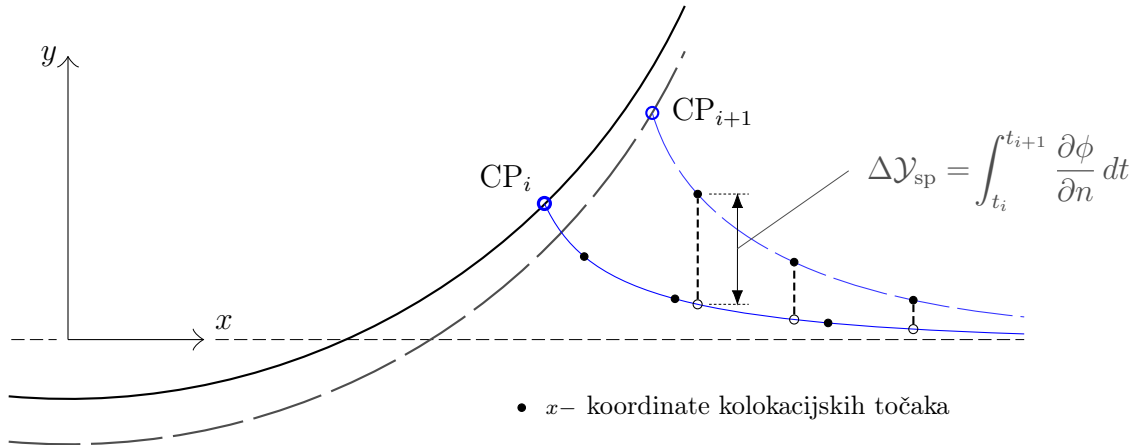
U slučaju nesimetričnog prodiranja procjenu položaja kontaktne točke treba napraviti za lijevu i desnu stranu domene s obzirom da nastaje nejednoliko podizanje slobodne površine, odnosno vrijedi $y_{CL} \neq y_{CR}$. Prva procjena radi se na osnovu brzine gibanja kontaktnih točaka dCP/dt iz prethodnog vremenskog koraka.

Nakon rješavanja problema s \mathcal{H}_L i \mathcal{H}_R iz prve procjene fiksira se položaj kontaktne točke na jednoj od strana dok se na drugoj radi nova procjena položaja. Postupak se iterira sve dok se ne odredi točna pozicija kontaktne točke.

3.4. Stvaran oblik slobodne površine u trenutku t_{i+1}

Na osnovi izračunatih brzina na $\mathcal{S}_{sp} = \mathcal{H}$ dobivenih numeričkim putem moguće je rekonstruirati stvarni oblik slobodne površine \mathcal{Y} . Stvarni vertikalni pomak točke na slobodnoj površini od trenutka t_i do t_{i+1} dobiva se integracijom kinematičkog rubnog uvjeta (2.47) slobodne površine:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{sp(i+1)} &= \mathcal{Y}_{sp(i)} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial \phi}{\partial n} dt \\ &\cong \mathcal{Y}_{sp(i)} + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{t_i} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{t_{i+1}} \right) (t_{i+1} - t_i) \end{aligned} \quad (3.44)$$



Slika 3.7: Određivanje stvarne slobodne površine u trenutku t_{i+1}

Integracija se provodi na pozicijama kolokacijskih točaka proračunske slobodne površine $\mathcal{H}_{(i+1)}$ u trenutku t_{i+1} . S obzirom da vrijedi (3.30) vertikalne brzine čestica slobodne površine poznate su iz numeričkih rješenja problema za $\mathcal{S}_{sp} = \mathcal{H}_{(i)}$ odnosno $\mathcal{S}_{sp} = \mathcal{H}_{(i+1)}$.

Vrijednosti brzina u t_{i+1} očitavaju se iz kolokacijskih točaka, dok se brzine u t_i , zbog nepoklapanja x koordinata pojedinih točaka, dobivaju linearnom interpolacijom dviju najbližih poznatih vrijednosti (Slika 3.7).

3.5. Računanje tlaka

Nakon što se izračunaju vrijednosti potencijala brzine na oplakanoj površini tijela u trenucima t_i i t_{i+1} te vremenski korak Δt moguće je odrediti distribuciju tlaka na tijelu korištenjem Cauchy-Lagrangeovog integrala (2.11):

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho |\nabla \phi|^2 \quad (3.45)$$

Promjena potencijala brzine u vremenu $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ izražava se pomoću koncepta poopćene materijalne derivacije [21] što je standardan način računanja varijabli u numeričkim proračunima:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{D\phi}{Dt} - \vec{U} \cdot \nabla \phi$$

Materijalna derivacija potencijala brzine računa se preko Eulerove sheme 1. reda:

$$\left(\frac{D\phi}{Dt} \right)_j = \left(\frac{\Delta \phi}{\Delta t} \right)_j = \frac{\phi_{t+\Delta t} - \phi_t}{\Delta t} \quad (3.46)$$

gdje indeks j označava j -tu kolokacijsku točku ($Q_{(j)}$; odnosno j -ti rubni element) u vremenskim trenucima $t_i = t$ i $t_{i+1} = t + \Delta t$. S obzirom da su se tijelo i razina slobodne površine pomakli između dva vremenska trenutka te da se u svakom koraku domena ponovo premrežuje ova točka se neće nalaziti u istom položaju na tijelu u trenutku t odnosno $t + \Delta t$.

Brzina gibanja \vec{U} predstavlja brzinu promjene položaja kolokacijske točke $Q_{(j)}$ između trenutaka t i $t + \Delta t$ te se računa iz njezine pozicije u tim trenucima:

$$\begin{aligned} (\vec{U})_j &= \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \\ U_x &= \frac{x_{t+\Delta t} - x_t}{\Delta t} \\ U_y &= \frac{y_{t+\Delta t} - y_t}{\Delta t} \end{aligned} \quad (3.47)$$

gdje je \vec{r} vektor položaja kolokacijske točke ' j '.

Gradijent potencijala $\nabla \phi$ računa se pomoću normalne i tangencijalne komponente. Normalna komponenta predstavlja projekciju brzine gibanja tijela u kolokacijskoj točki ' j ' u smjeru normale rubnog elementa kome pripada točka ' j ':

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j = \vec{v}_B \cdot \vec{n} \quad (3.48)$$

Tangencijalna komponenta posljedica je strujanja tekućine duž konture tijela te predstavlja promjenu potencijala brzine duž oplakane površine tijela. Računa se u kolokacijskim točkama oplakane površine pomoću sheme središnje konačne diferencije [48, 49] korištenjem vrijednosti potencijala u aktivnoj te u dvije susjedne točke (Slika 3.8):

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right)_j = \frac{d_a^2 \phi_{j+1} + (d_b^2 - d_a^2) \phi_j - d_b^2 \phi_{j-1}}{d_a d_b (d_a + d_b)} \quad \text{za } j = 2, \dots, N-1 \quad (3.49)$$

gdje su $d_a = d(Q_{(j-1)}, Q_{(j)})$ odnosno $d_b = d(Q_{(j)}, Q_{(j+1)})$ Euklidske udaljenosti između kolokacijskih točaka, a N broj kolokacijskih točaka na oplakanoj površini.

U krajnjim kolokacijskim točkama oplakane površine $j = 1$ te $j = N$ nije moguće koristiti opisani izraz (3.49) nego se primjenjuje numeričko deriviranje unaprijed odnosno unatrag [48] što daje sljedeće relacije:

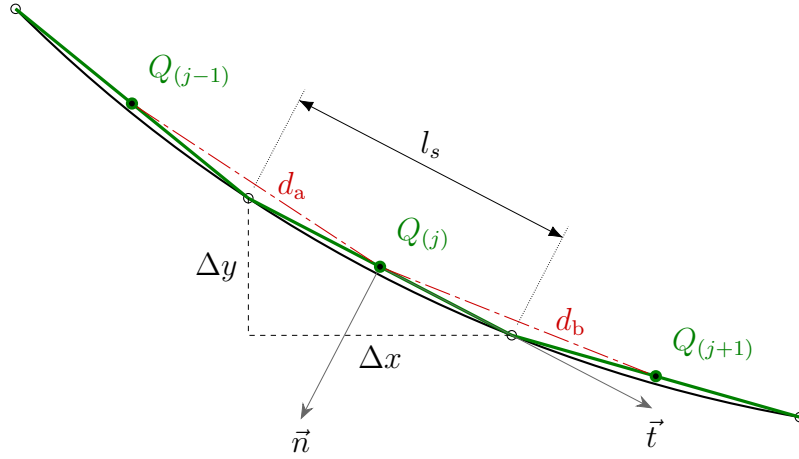
$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right)_1 = -\frac{d_a^2\phi_3 - (d_a + d_b)^2\phi_2 + (d_b^2 + 2d_ad_b)\phi_1}{d_ad_b(d_a + d_b)} \quad (3.50)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right)_N = \frac{d_b^2\phi_{N-2} - (d_a + d_b)^2\phi_{N-1} + (d_a^2 + 2d_ad_b)\phi_N}{d_ad_b(d_a + d_b)} \quad (3.51)$$

Udaljenosti d_a odnosno d_b definirane su na sljedeći način:

$$d_a = d(Q_{(1)}, Q_{(2)}), \quad d_b = d(Q_{(2)}, Q_{(3)}) \quad \text{za } j = 1 \quad (3.52)$$

$$d_a = d(Q_{(N-1)}, Q_{(N-2)}), \quad d_b = d(Q_{(N)}, Q_{(N-1)}) \quad \text{za } j = N \quad (3.53)$$



Slika 3.8: Potrebni parametri za proračun tlaka u kolokacijskoj točki $Q_{(j)}$

Komponente vektora normale j -tog segmenta:

$$n_x = \frac{\Delta y}{l_s}, \quad n_y = -\frac{\Delta x}{l_s} \quad (3.54)$$

Komponente vektora tangente j -tog segmenta:

$$t_x = \frac{\Delta x}{l_s}, \quad t_y = \frac{\Delta y}{l_s} \quad (3.55)$$

gdje je l_s duljina elementa.

U konačnici, komponente vektora gradijenta potencijala brzine j -tog elementa glase:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_j = t_x\left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right)_j + n_x\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_j \quad (3.56)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_j = t_y\left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right)_j + n_y\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_j \quad (3.57)$$

Promjena u potencijalu ϕ između trenutaka t i $t + \Delta t$:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_j = \left(\frac{D\phi}{Dt}\right)_j - U_x\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_j - U_y\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_j \quad (3.58)$$

Konačan izraz za tlak u točki j na uronjenoj površini tijela:

$$(p)_j = -\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_j - \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_j^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_j^2\right] \quad (3.59)$$

Posebnu pažnju treba posvetiti računanju tlakova u blizini kontaktnih točaka. Kako u kontaktnoj točki brzina fluida teži ka ∞ mogao bi se pojaviti problem sa zadnjim članom na desnoj strani (3.59). Naime, ako $\frac{\partial\phi}{\partial y} \rightarrow \infty$ tada:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} \rightarrow -\infty$$

Sada se može pokazati da za ukupni tlak u kontaktnoj točki vrijedi:

$$p \rightarrow -\infty$$

3.6. Analiza rezultata numeričkog proračuna

3.6.1. Osnovni parametri proračunske domene

Prema numeričkom obliku (3.19) osnovne integralne jednadžbe problema (3.9) vidljivo je da točnost i kvaliteta konačnih rezultata u obliku potencijala na oplakanoj odnosno brzina na slobodnoj površini ponajprije ovisi o tri parametra:

- broju elemenata na oplakanoj površini tijela,
- broju segmenata na proračunskoj slobodnoj površini te
- vrijednosti funkcije $b(t)$ u pojedinom koraku.

S obzirom da vrijednost funkcije $b(t)$ ujedno određuje i dimenzije numeričkog dijela domene, računanje optimalne veličine iste je od primarne važnosti. Svi ostali parametri mogu se optimirati tek nakon što je poznata veličina domene proračuna. Vrijednost funkcije b definira se u ovisnosti o dimenziji problema koju određuju horizontalna udaljenost kontaktne točke od ishodišta proračunskog koordinatnog sustava c te vertikalna duljina oplakane površine tijela H :

$$b(t) = f(c(t), H(t)) \quad (3.60)$$

$$b = m \cdot \max(c, H) \quad (3.61)$$

gdje je m konstanta koju treba definirati prije početka proračuna.

Kod računanja prodiranja tijela općeg oblika (npr. poprečnog presjeka brodske forme) odnos između vrijednosti $c(t)$ i $H(t)$ mijenja se tijekom izvođenja proračuna,

a samim time i veličina koja definira vrijednost funkcije b u pojedinom vremenskom koraku. Kod klinova situacija je jednoznačna te će kod manjih nagiba dominirati vrijednost c , a kod većih dubina prodiranja H .

U ostale parametre koji utječu na rezultate numeričkog proračuna, uz broj segmenata na oplakanoj odnosno slobodnoj površini, ubrajaju se i dva dodatna kojima se definira omjer između duljina dva susjedna segmenta na oba spomenuta ruba proračunske domene. Definiranjem opisanih omjera omogućava se gušće postavljanje segmenata na onom dijelu domene u kojem se očekuju veći gradijenti.

U skladu s lokalnim rješenjem problema vanjskog strujanja oko konveksnih klinova (Poglavlje 2.4.2.) na proračunskoj slobodnoj površini mogu se očekivati veći gradijent funkcije vertikalne brzine čestica tekućine u okolini kontaktne točke što znači da se zgušnjavanje segmenata isplati napraviti upravo u tom dijelu domene. Na oplakanoj površini tijela veći gradijenti potencijala očekuju se u okolini kontaktne točke pa stoga segmenti također koncentriraju na tom području domene.

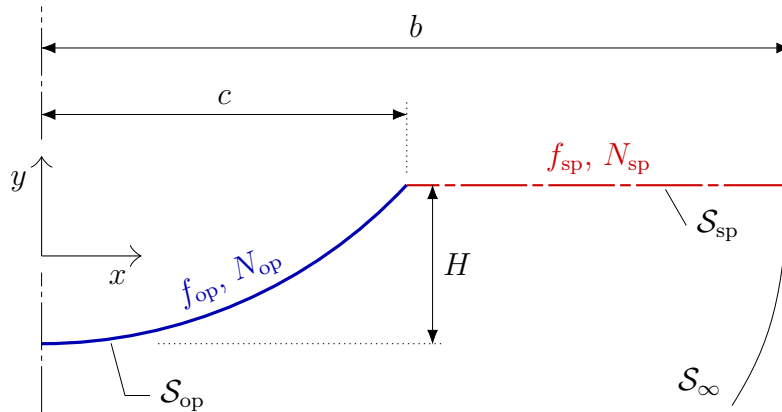
Omjer duljina dva susjedna segmenta na dijelu ruba proračunske domene \mathcal{S} određuje se iz sljedeće relacije:

$$(l_s)_j = l_0 (f_s)^{j-1} \quad j = 1, \dots, N_S \quad (3.62)$$

gdje su $(l_s)_j$ duljina segmenata j , f_s omjer duljina dva susjedna segmenta koji je poznat na početku proračuna, N_S broj segmenata na \mathcal{S} , a l_0 osnovna ili nulta duljina segmenta:

$$l_0 = \frac{L_S}{\sum_{j=1}^{N_S} (f_s)^{j-1}} \quad (3.63)$$

L_S predstavlja duljinu razmatranog dijela ruba proračunske domene strujanja.



Slika 3.9: Definiranje osnovnih parametara proračunske domene

Broj segmenata ($N_S = N_{op}$ ili $N_S = N_{sp}$) te omjer njihovih duljina ($f_S = f_{op}$ ili $f_S = f_{sp}$) na oplakanoj površini tijela odnosno na slobodnoj površini tekućine, koji se zadaje na početku proračuna, odnosi se za samo na jednu polovinu proračunske domene (Slika 3.9).

3.6.2. Optimalna vrijednost funkcije $b(t)$ za klinasto tijelo

Prema (3.61) određivanje vrijednosti funkcije $b(t)$ svodi se na definiranje optimalne konstante m . Kao referentni model koristi se tijelo klinastog poprečnog presjeka čije su karakteristike prodiranja dane u Tablici 3.1.

Tablica 3.1: Karakteristike prodiranja klinova korištenih u određivanju veličine proračunske domene i analize konvergencije rješenja

kut nagiba tijela	β	10° 40°
brzina prodiranja (m/s)	V_y	1
početna dubina prodiranja (m)	h_0	10^{-4}
gustoća tekućine (t/m ³)	ρ	1

Za potrebe analize napravljene su dvije grupe primjera kojima je dio parametara numeričkog proračuna variran, a dio fiksiran. U obje grupe fiksirane su vrijednosti omjera duljina segmenata na oba ruba domene te broj segmenata na oplakanoj površini, dok su preostalim parametrima vrijednosti mijenjane u određenom rasponu. Grupe se međusobno razlikuju po iznosu omjera duljine i broju segmenata na slobodnoj površini (Tablica 3.2).

Tablica 3.2: Parametri numeričkog proračuna za grupu I primjera

m	1.25	1.5	1.75	2.0	2.5	3.0	4.0
f_{op}	1.15						
N_{op}	40						
f_{sp}	1.00						
N_{sp}	50	100	150	200	300	400	600

Tablica 3.3: Parametri numeričkog proračuna za grupu II primjera

m	1.25	1.5	1.75	2.0	2.5	3.0	4.0
f_{op}	1.15						
N_{op}	40						
f_{sp}	1.05						
N_{sp}	30	36	42	48	56	60	70

U prvoj grupi primjera vrijednosti promjenjivih parametara podešene su da u kombinaciji dadu približno istu duljinu segmenta na oplakanoj površini u svim proračunskim varijantama (Tablica 3.4). Kod druge grupe primjera nastojalo se u svim varijantama dobiti približno jednaku duljinu segmenta najbližeg kontaktnoj točki $(l_s)_1$ s obzirom da zbog $f_{sp} \neq 1$ nije moguće postići jednake duljine duž cijele proračunske slobodne površine (Tablica 3.4).

Tablica 3.4: Usporedba duljine segmenta $(l_s)_1$ po varijantama pojedinih grupa primjera

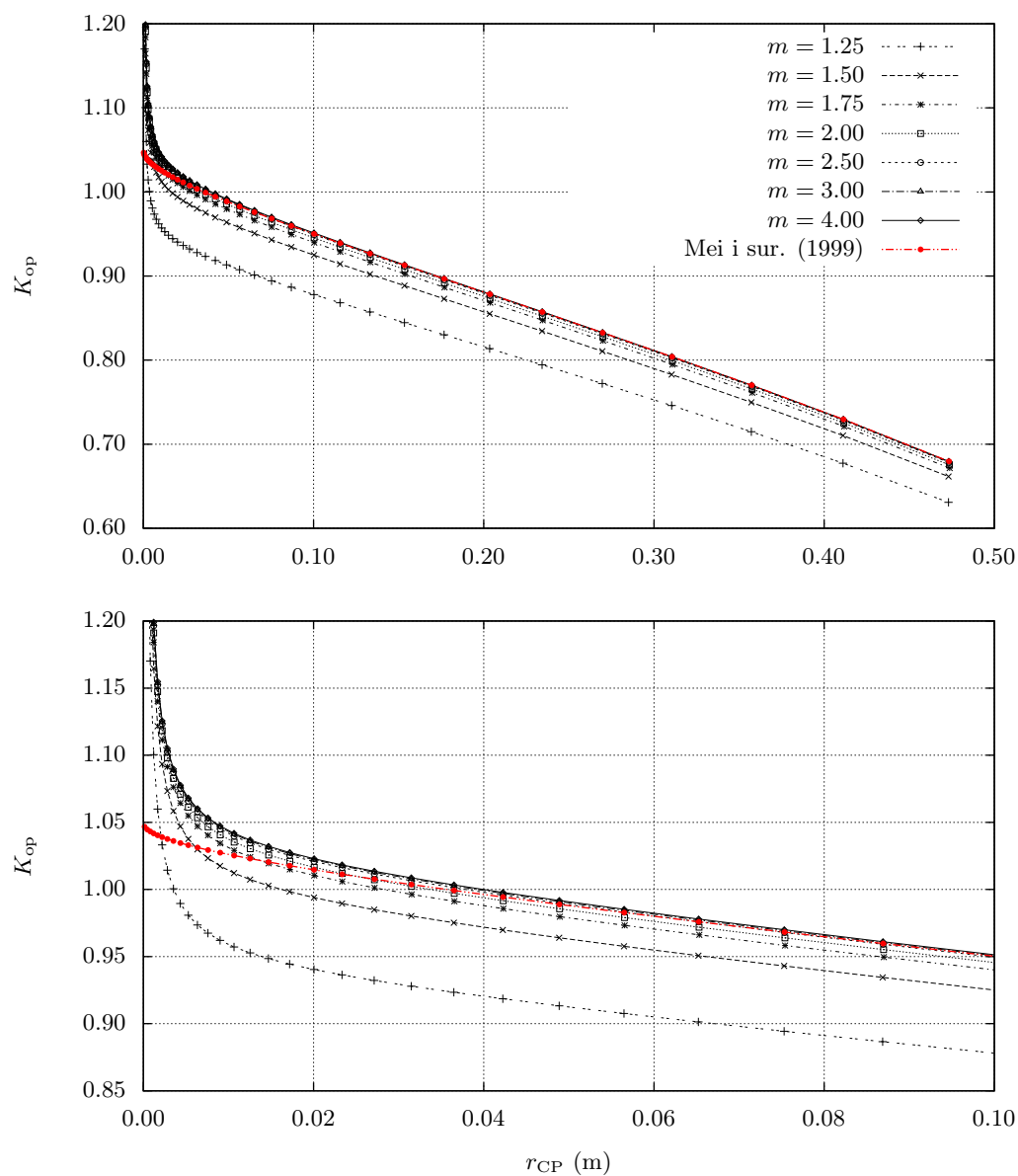
	m	1.25	1.5	1.75	2.0	2.5	3.0	4.0
grupa I	$(l_s)_1 \cdot 10^{-3}$	2.493	2.492	2.496	2.495	2.494	2.494	2.494
grupa II	$(l_s)_1 \cdot 10^{-3}$	2.442	2.599	2.769	2.650	2.607	2.818	2.541

Primjeri su međusobno uspoređeni na osnovi vrijednosti funkcije lokalnog rješenja na oplakanoj površini tijela K_{op} , a kao referentna mjera točnosti rješenja korišten je analitički model za klinasta tijela razvijen od strane Meijsa i sur. (1999) [39]. Funkcija lokalnog rješenja pogodna je za usporedbe ovakve vrste s obzirom da prema definiciji (2.88) sadrži geometrijski dio funkcije potencijala (2.86) vanjskog strujanja oko konveksnog klina. Na taj način dobivene vrijednosti potencijala na oplakanoj površini raznih metoda uspoređuju se na istim udaljenostima od kontaktne točke.

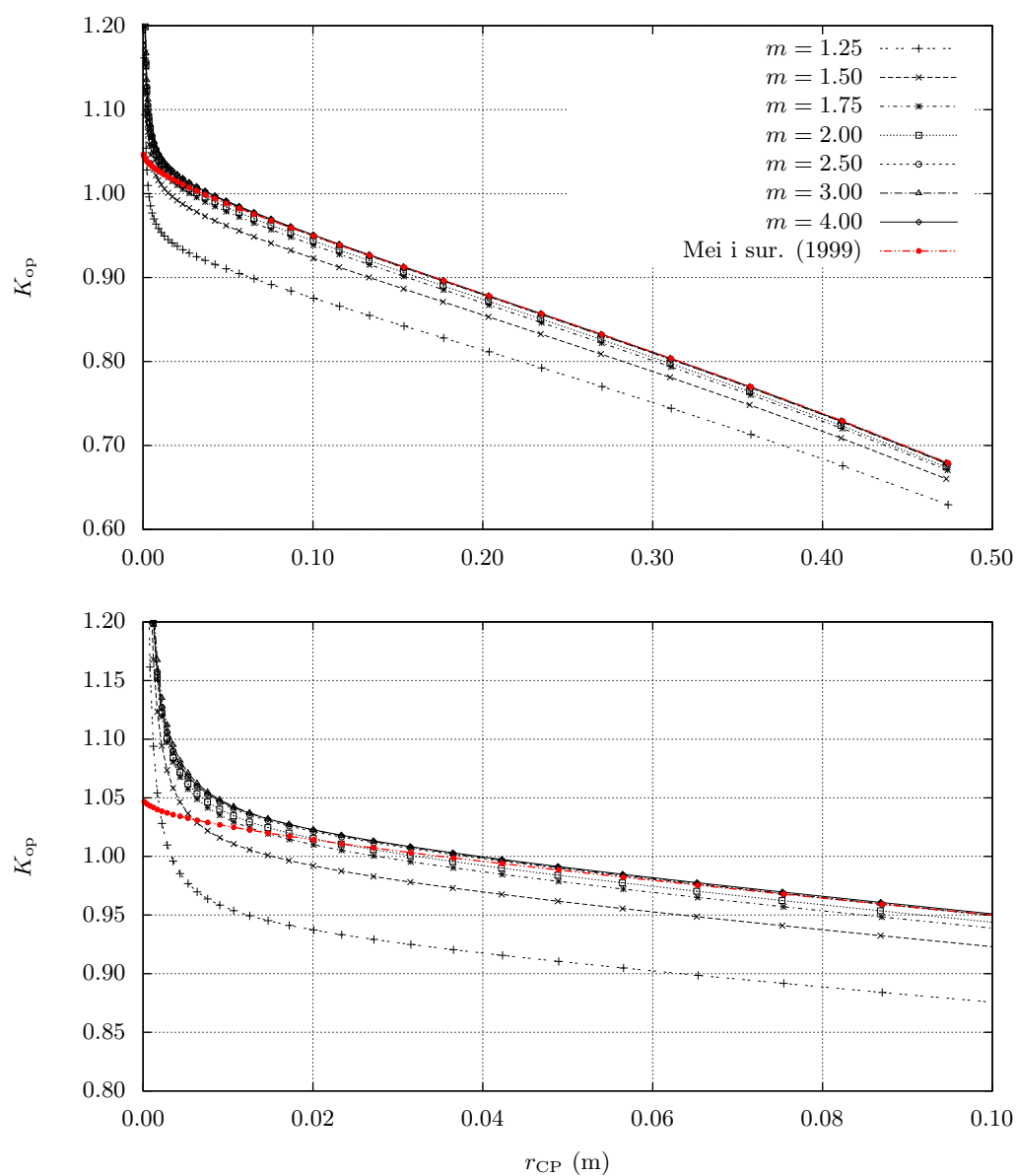
Usporedbom vrijednosti K_{op} klinastog tijela nagiba 10° za primjere grupe I i referentnog analitičkog rješenja (Slika 3.10) može se zaključiti da vrijednosti $m \geq 2.5$ daju dovoljno dobre rezultate na većem dijelu domene. Problem predstavlja jedino područje oko kontaktne točke gdje vrijednosti PW proračuna značajnije odstupaju od referentnih.

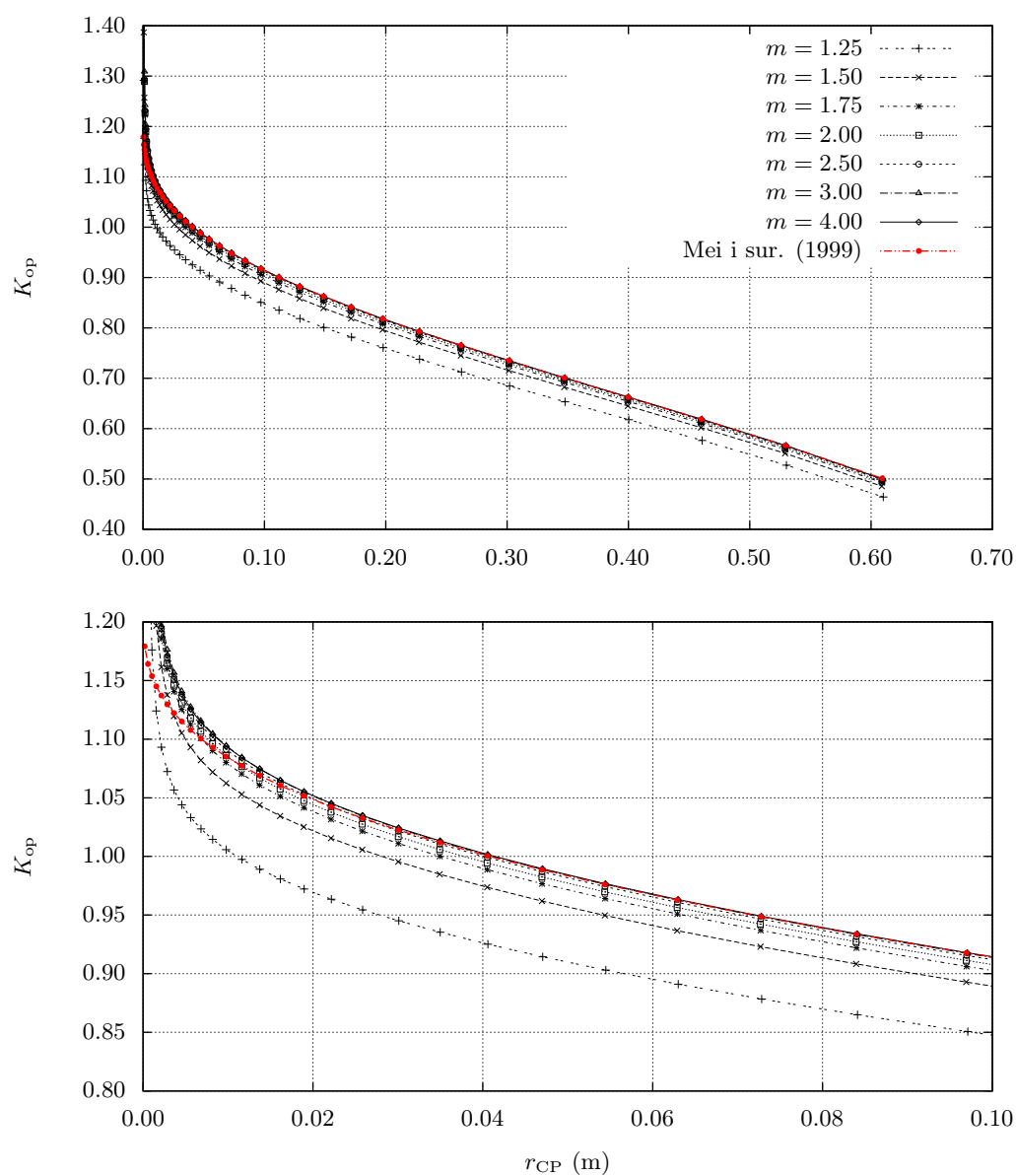
Isti zaključak se može izvesti i analizom rezultata istog klina za primjere grupe II s obzirom da vrijednosti funkcije K_{op} za obje grupe primjera minimalno odstupaju pa se može zaključiti kako broj segmenata na proračunskoj slobodnoj površini ne utječe značajno na rješenje ukoliko je duljina prvog segmenta do kontaktne točke u oba slučaja približno jednaka (Tablica 3.4).

Vrijednosti K_{op} klinastog tijela nagiba 40° za grupu II primjera pokazuju bolje poklapanje s referentnim analitičkim modelom u okolini kontaktne točke (Slika 3.12). Također, i u ovom slučaju vrijednosti $m \geq 2.5$ daju dovoljno dobre rezultate na većem dijelu domene.



Slika 3.10: Usporedba vrijednosti K_{op} za klin nagiba 10° i primjere grupe I

Slika 3.11: Usporedba vrijednosti K_{op} za klin nagiba 10° i primjere grupe II



Slika 3.12: Usporedba vrijednosti K_{op} za klin nagiba 40° i primjere grupe II

3.6.3. Analiza konvergencije numeričkog proračuna

Konvergencija rješenja također je ispitana na dva klinasta tijela (nagiba 10° i 40°) pri optimalnoj vrijednosti konstante $m = 2.5$ i uz variranje parametara slobodne i oplakane površine. Na slobodnoj površini mijenjan je omjer duljine susjednih segmenata u rasponu vrijednosti (Tablica 3.5), a njihov broj fiksiran na $N_{\text{sp}} = 56$. Na oplakanoj površini tijela fiksiran je omjer duljina susjednih segmenata na $f_{\text{op}} = 1.15$, a mijenjan je njihov broj u određenom rasponu vrijednosti (Tablica 3.6).

Tablica 3.5: Parametri numeričkog proračuna za grupu A primjera

m	2.50						
f_{op}	1.15						
N_{op}	40						
f_{sp}	1.05	1.06	1.08	1.10	1.11	1.12	1.14
N_{sp}	56						

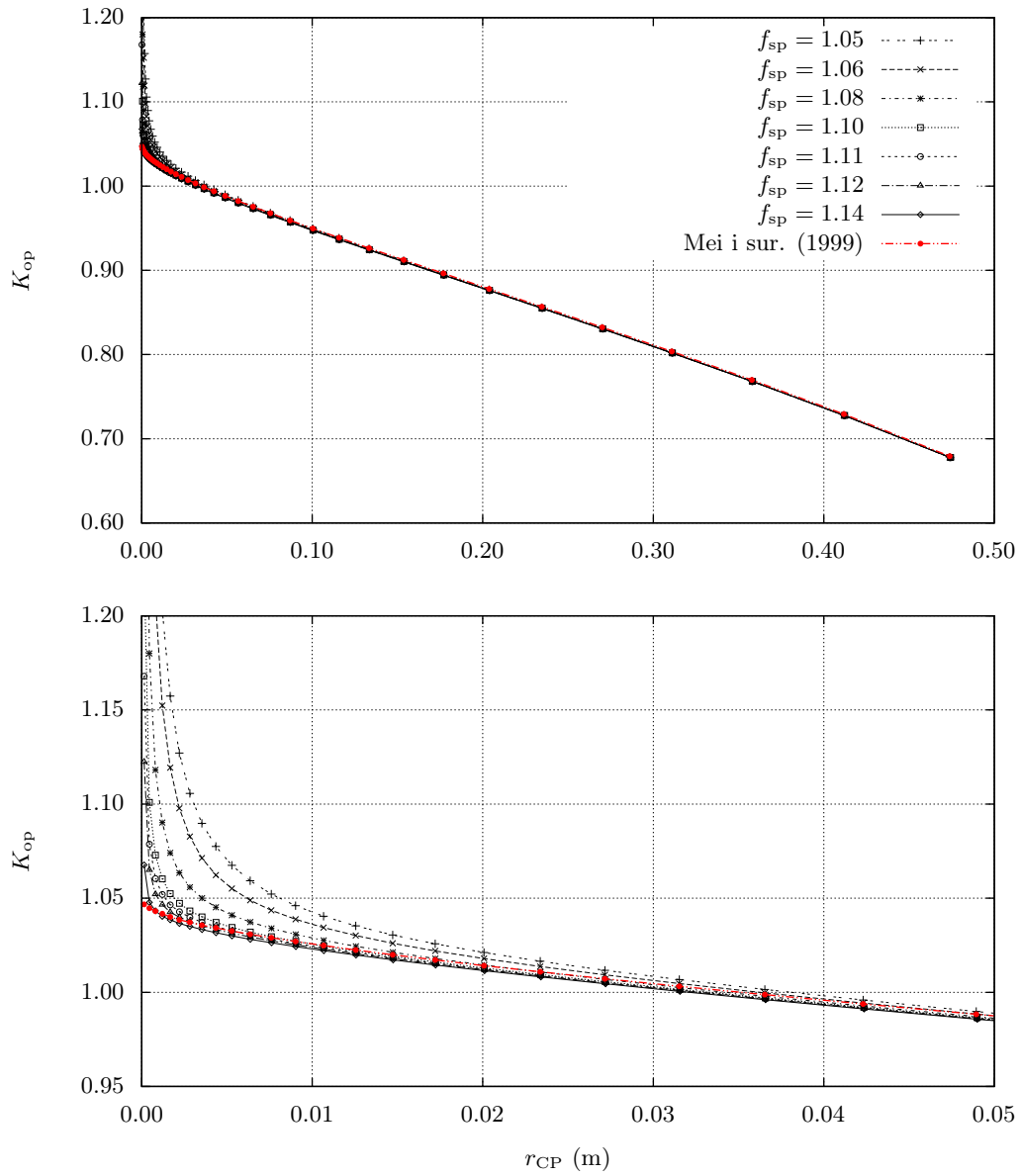
Tablica 3.6: Parametri numeričkog proračuna za grupu B primjera

m	2.50						
f_{op}	1.15						
N_{op}	5	10	20	30	40	50	60
f_{sp}	1.10						
N_{sp}	56						

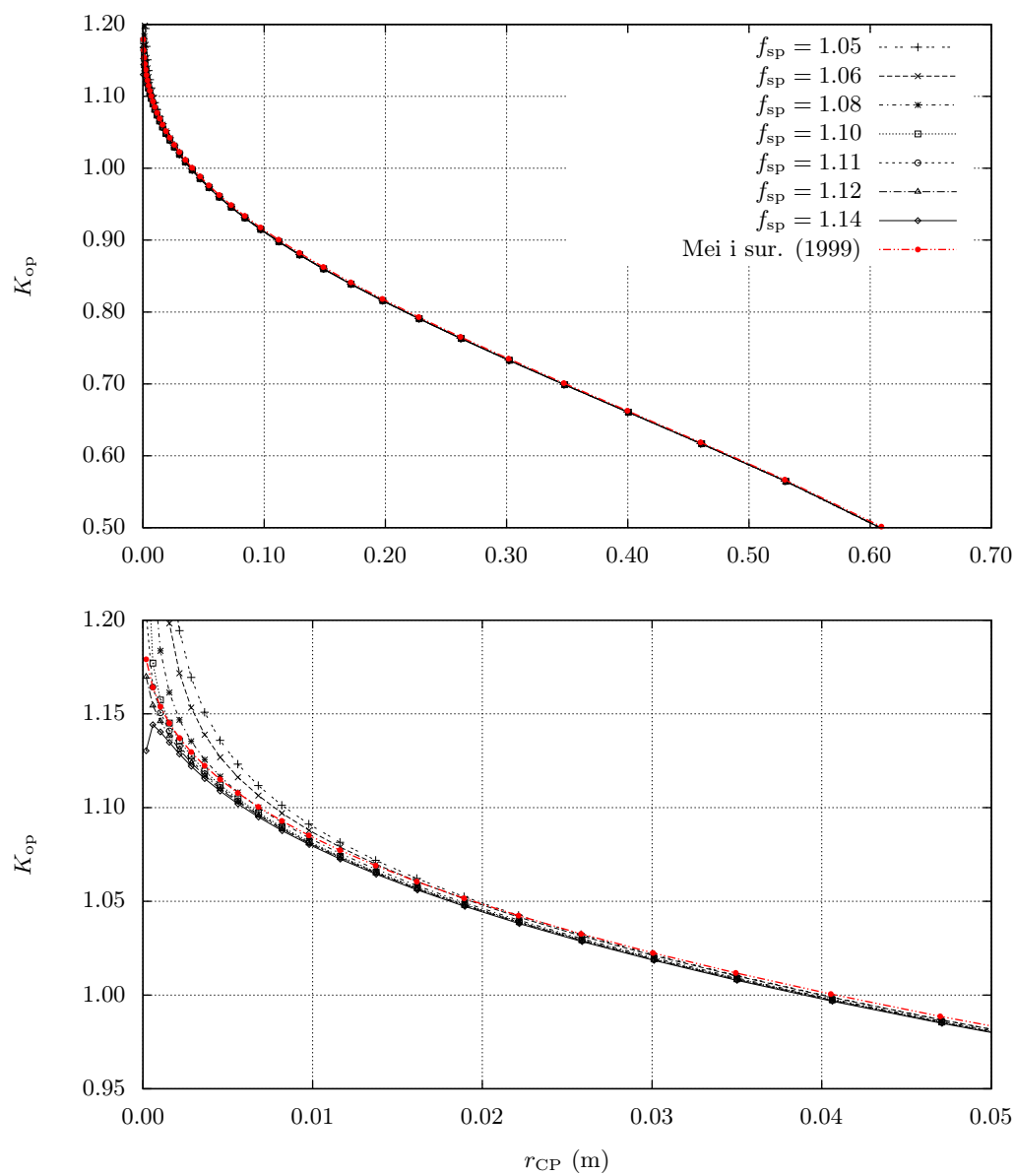
Usporedbom vrijednosti funkcije K_{op} klinastog tijela nagiba 10° za primjere grupe I primjećuje se značajno povećanje točnosti rješenja u okolini kontaktne točke s porastom vrijednosti f_{sp} odnosno sa smanjenjem duljine segmenata u istom području. U ostalom dijelu domene vrijednosti PW metode neznatno su manje od referentnih.

Kod klinastog tijela nagiba 40° također je primjetno povećanje točnosti s porastom vrijednosti f_{sp} s tom razlikom da za $f_{\text{sp}} = 1.14$ u neposrednoj blizini kontaktne točke rješenje znatnije odstupa.

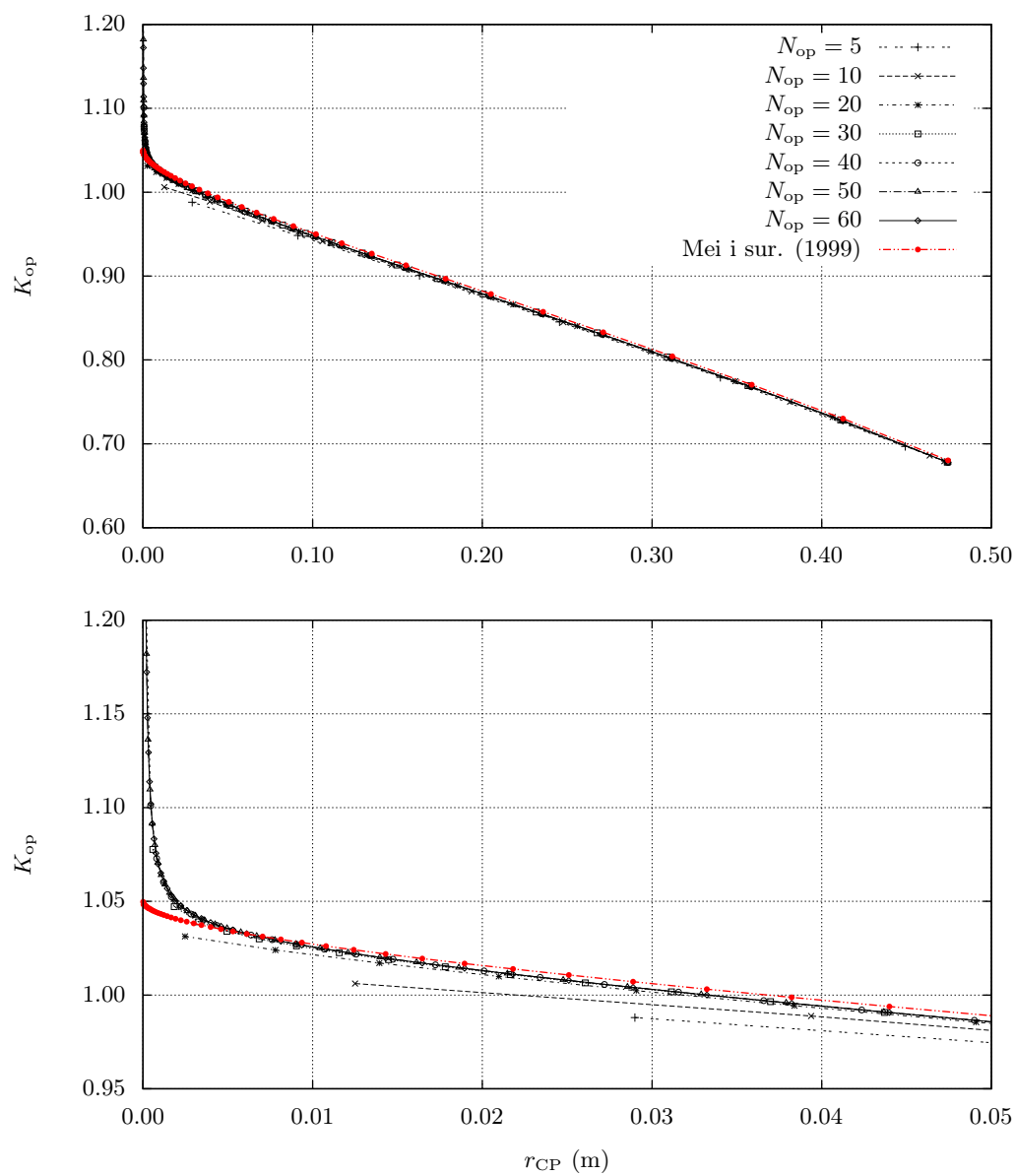
U slučaju klinastog tijela nagiba 10° za primjere grupe B vidljivo je da i vrlo mali broj segmenata na oplakanoj površini $N_{\text{op}} \leq 10$ daje relativno zadovoljavajuće rezultate. S porastom broja segmenata raste i točnost, ali samo na dovoljno velikoj udaljenosti od kontaktne točke.



Slika 3.13: Analiza konvergencije rješenja klinastog tijela nagiba 10° za primjere grupe A



Slika 3.14: Analiza konvergencije rješenja klinastog tijela nagiba 40° za primjere grupe A



Slika 3.15: Analiza konvergencije rješenja klinastog tijela nagiba 10° za primjere grupe B

4. Poboljšana poopćena Wagnerova metoda

Prema zaključcima prethodnog poglavlja može se izdvojiti nekoliko nedostataka izvorne poboljšane Wagnerove metode kao što su značajna odstupanja rezultata ovisno o tome kolika je horizontalna veličina domene $b(t)$ (Slika 3.1) te netočne vrijednosti potencijala brzine u neposrednoj okolini kontaktne točke.

Odstupanja rezultata moguće je izbjeći uklanjanjem potrebe za definiranjem rubnih elemenata na slobodnoj površini čime se izbjegava određivanje horizontalne veličine domene. Način na koji se to postiže je odabir Greenove funkcije Kelvinovog tipa u rješavanju integralne jednadžbe problema. Pri tome treba voditi računa da odabrana funkcija zadovoljava rubni uvjet na slobodnoj površini ($\phi = 0$).

Točnije rezultate u okolini kontaktne točke moguće je postići drugačijim definiranjem potencijala brzine na cijeloj domeni strujanja i to izdvajanjem regularnog dijela potencijala pomoću posebne funkcije koja određuje njezin singularni dio.

4.1. Greenova funkcija Kelvinovog tipa

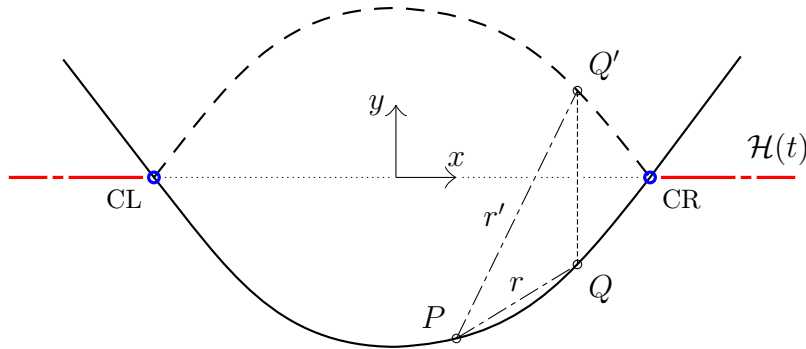
Ako se s $P = P(x, y)$ i $Q = Q(\xi, \eta)$ označe točke koje pripadaju rubu domene \mathcal{S} tada je $\kappa = \frac{1}{2}$ te integralna jednadžba (3.1) prelazi u:

$$\frac{1}{2}\phi(P) = \int_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial\phi(Q)}{\partial n} G^0(P, Q) - \phi(Q) \frac{\partial G^0(P, Q)}{\partial n} \right) d\mathcal{S} \quad (4.1)$$

gdje je $G^0(P, Q)$ Greenova funkcija Kelvinovog tipa.

Greenova funkcija $G^0(P, Q)$ definira se na sličan način kao i Rankinova Greenova funkcija u osnovnoj poopćenoj Wagnerovoj metodi, ali se za razliku od prethodne sastoji od dva člana

$$G^0(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln r - \frac{1}{2\pi} \ln r' \quad (4.2)$$



Slika 4.1: Parametri kojima se definira Greenova funkcija Kelvinovog tipa

gdje se r odnosno r' definirani na sljedeći način:

$$\begin{aligned} r &= d(P, Q) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \\ r' &= d(P, Q') = \sqrt{(x - \xi')^2 + (y - \eta')^2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Koordinata (ξ', η') predstavlja zrcalnu sliku točke (ξ, η) u odnosu na apscisu ($y = 0$) koordinatnog sustava u kojemu je definiran problem (4.1, Slika 4.1):

$$\xi' = \xi \quad \eta' = -\eta$$

U formulaciji Kelvinove Greenove funkcije (4.2) prvi član identičan je Rankinovo funkciji iz osnovne poopćene Wagnerove metode, dok se drugi član razlikuje u predznaku i varijabli r' koja definira udaljenost od zrcalne slike neke točke domene (ξ, η) . Greenovu funkciju moguće je formulirati na ovakav način samo u slučaju da se apscisa koordinatnog sustava (x) smjesti na vertikalnu poziciju proračunske slobodne površine \mathcal{H} odnosno da vrijedi $\mathcal{H} = 0$.

Ovako definirana Greenova funkcija (4.2) poprima vrijednost nula na svim točkama proračunske domene koje leže na apscisi koordinatnog sustava što pruža mogućnost egzaktnog zadovoljavanja rubnog uvjeta ($\phi = 0$) na proračunskoj slobodnoj površini.

Posljedica toga je svođenje ruba domene \mathcal{S} u integralnoj jednadžbi (4.1) samo na oplakanu površinu tijela $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{op}}$. Smanjivanje ruba domene povlači i manji broj nepoznanica pri rješavanju linearnog sustava jednadžbi što uzrokuje kraće vrijeme izvršavanja numeričkog dijela proračuna. Kako nema premreživanja proračunske slobodne površine, nestala je potreba i za definiranjem funkcije $b(t)$ (Slika 3.1).

4.2. Desingularizacija rješenja u blizini kontaktne točke

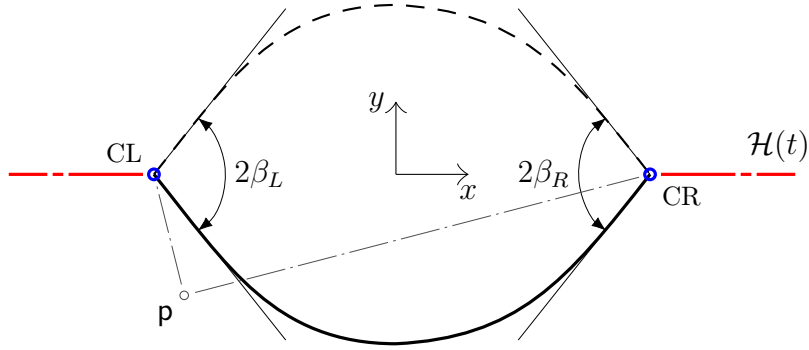
Desingularizacija rješenja u okolini kontaktne točke izvodi se redefiniranjem potencijala brzine na cijeloj domeni strujanja. Iz rješenja, odnosno ukupnog potencijala brzine, izdvaja se regularni dio pomoću posebne funkcije kojom se opisuje utjecaj kontaktnih točaka na domenu. Ukupni potencijal brzine u točki domene $\mathbf{p}(x, y)$ definira se na sljedeći način:

$$\phi(\mathbf{p}) = \Sigma(\mathbf{p}) \tilde{\phi}(\mathbf{p}) \quad (4.4)$$

gdje je $\tilde{\phi}(\mathbf{p})$ regularni dio potencijala brzine, a $\Sigma(\mathbf{p})$ funkcija koja opisuje ponašanje rješenja u domeni uslijed utjecaja kontaktnih točaka, odnosno singularni dio potencijala brzine.

Funkcija $\Sigma(\mathbf{p})$ se definira kao umnožak singularnog dijela uslijed utjecaja lijeve odnosno desne kontaktne točke:

$$\Sigma(\mathbf{p}) = \Sigma_L(\mathbf{p}) \Sigma_R(\mathbf{p}) \quad (4.5)$$

Slika 4.2: Definiranje funkcije ponašanja rješenja (Σ) u okolini kontaktnih točaka

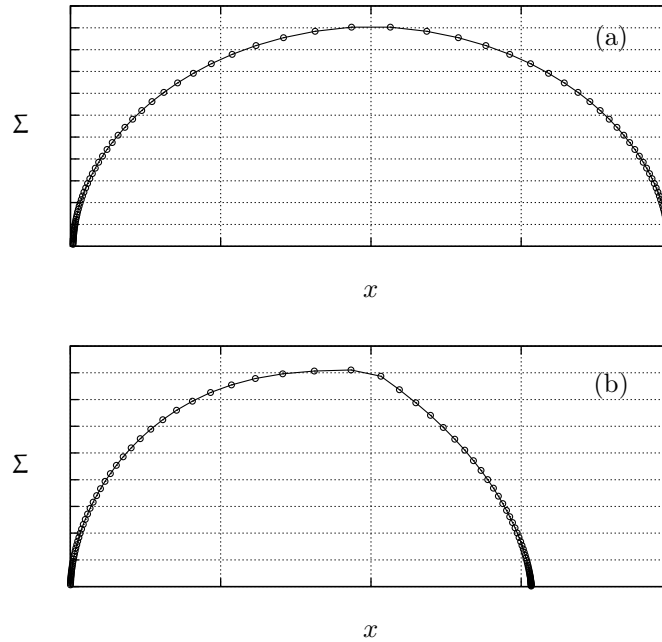
pri čemu se utjecaj pojedinih kontaktnih točaka izražava funkcijama

$$\begin{aligned}\Sigma_L(\mathbf{p}) &= r_L^{\gamma_L} \\ \Sigma_R(\mathbf{p}) &= r_R^{\gamma_R}\end{aligned}\quad (4.6)$$

Varijable r_L i r_R su funkcije udaljenosti točke \mathbf{p} u domeni od lijeve odnosno desne kontaktne točke:

$$\begin{aligned}r_L &= \sqrt{(x - x_{CL})^2 + (y - y_{CL})^2} \\ r_R &= \sqrt{(x - x_{CR})^2 + (y - y_{CR})^2}\end{aligned}\quad (4.7)$$

gdje (x_{CL}, y_{CL}) predstavlja položaj lijeve, a (x_{CR}, y_{CR}) položaj desne kontaktne točke u lokalnom koordinatnom sustavu tijela.

Slika 4.3: Graf funkcije $\Sigma = f(x)$ simetričnog (a) i nesimetričnog (b) tijela

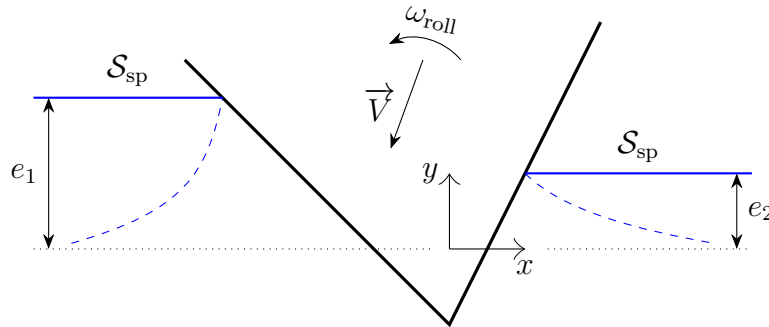
Eksponenti γ_L odnosno γ_R funkcije ponašanja Σ definirani su kako slijedi:

$$\begin{aligned}\gamma_L &= \frac{\pi}{2(\pi - \beta_L)} \\ \gamma_R &= \frac{\pi}{2(\pi - \beta_R)}\end{aligned}\tag{4.8}$$

gdje su β_L i β_R lokalni nagibi tangente na konturi tijela u lijevoj i desnoj kontaktnoj točki. Geometrijska definicija lokalnih nagiba prikazana je Slikom (4.2).

4.3. Formulacija problema za opći slučaj prodiranja tijela

U općem slučaju prodiranja dvodimenzionalnog tijela kroz inicijalno mirujuć fluid prisutne su sve tri komponente brzine tijela: vertikalna, horizontalna i brzina rotacije odnosno ljućanja (Slika 4.4). Sva prodiranja kod kojih je osim vertikalne brzine tijela prisutna i neka druga komponenta klasificiraju se kao nesimetrična. Postoji i posebni slučaj nesimetričnog strujanja kada tijelo nesimetričnog poprečnog presjeka prodire s prisutnom samo vertikalnom komponentom brzine.



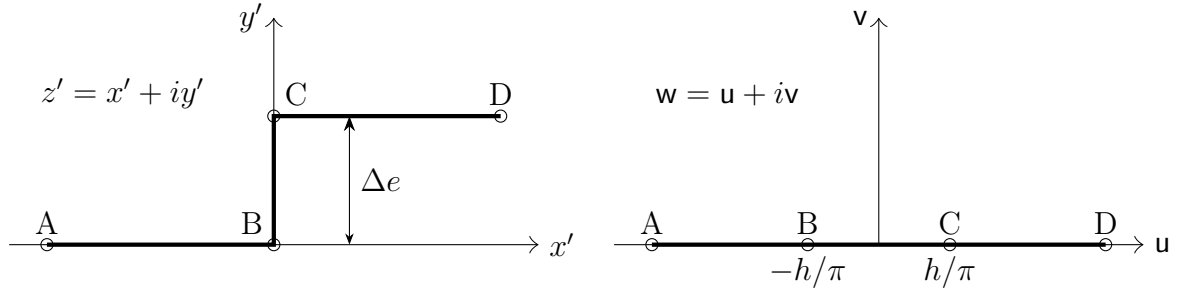
Slika 4.4: Opći slučaj prodiranja tijela s $V_x \neq V_y \neq \omega_{\text{roll}} \neq 0$

S obzirom na gibanje tijela sa sve tri komponente brzine, u općem slučaju prodiranja kontaktne točke s lijeve odnosno desne strane nalazit će se na različitim vertikalnim pozicijama. Korištenje novo formulirane Greenove funkcije Kelvinovog tipa moguće je ako su vertikalne koordinate obje kontaktne točke jednake ($y_{\text{CL}} = y_{\text{CR}}$). Izjednačavanje obje vertikalne koordinate postiže se nizom konformnih preslikavanja iz polazne u pomoćnu domenu. Najvažniji dio, uklanjanje vertikalne razlike, postiže se Schwartz–Christoffelovim preslikavanjem.

4.3.1. Schwartz–Christoffelovo preslikavanje

Razlika u vertikalnim koordinatama lijeve i desne kontaktne točke $\Delta e = |e_1 - e_2|$ može se promatrati kao stepenasta funkcija koja se daje konformno preslikati u horizontalni pravac pomoću Schwartz–Christoffelovog (S–C) preslikavanja. Stepenasta funkcija definirana je u polaznoj z' , a preslikani pravac u pomoćnoj domeni w (Slika

4.5). Gledano sa strane nesimetričnog prodiranja tijela točka A smještena je na lijevoj strani linearizirane slobodne površine, točka D na desnoj, dok se točke B i C nalaze se u sjecištima vertikalnog pravca $y' = 0$ s lijevom odnosno desno lineariziranom slobodnom površinom. Nakon preslikavanja sve točke smještene su na isti pravac $u = 0$ s time da se točke A i D preslikavaju u $-\infty$ odnosno ∞ , a točke B i C u $-\frac{\Delta e}{\pi}$ odnosno $\frac{\Delta e}{\pi}$.



Slika 4.5: Schwartz-Christoffelovo konformno preslikavanje stepenaste funkcije

Funkcija S-C preslikavanja definira se preko vlastite Jakobijane $\mathcal{J} = \frac{dz'}{dw} : w \in \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ u sljedećem obliku [50]:

$$\begin{aligned} \frac{dz'}{dw} &= \sqrt{\frac{w - \frac{\Delta e}{\pi}}{w + \frac{\Delta e}{\pi}}} \quad \text{ako je } e_1 > e_2 \\ \frac{dz'}{dw} &= \sqrt{\frac{w + \frac{\Delta e}{\pi}}{w - \frac{\Delta e}{\pi}}} \quad \text{ako je } e_1 < e_2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Integracijom Jakobijane \mathcal{J} dobiva se funkcija $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ koja preslikava koordinate iz pomoćne w u početnu domenu z' :

$$z' = i m_e + \sqrt{w - \frac{\Delta e}{\pi}} \sqrt{w + \frac{\Delta e}{\pi}} - \text{sign}(e_1 - e_2) \frac{\Delta e}{\pi} \text{Arch} \left(\frac{\pi w}{\Delta e} \right) \quad (4.10)$$

$$m_e = \max(0, e_1 - e_2) \quad (4.11)$$

S obzirom da je funkcija (4.11) nelinearna njezin inverz nije moguće jednostavno izraziti. Stoga se proračun inverzne funkcije izvodi numeričkim putem korištenjem Newton-Raphson metode.

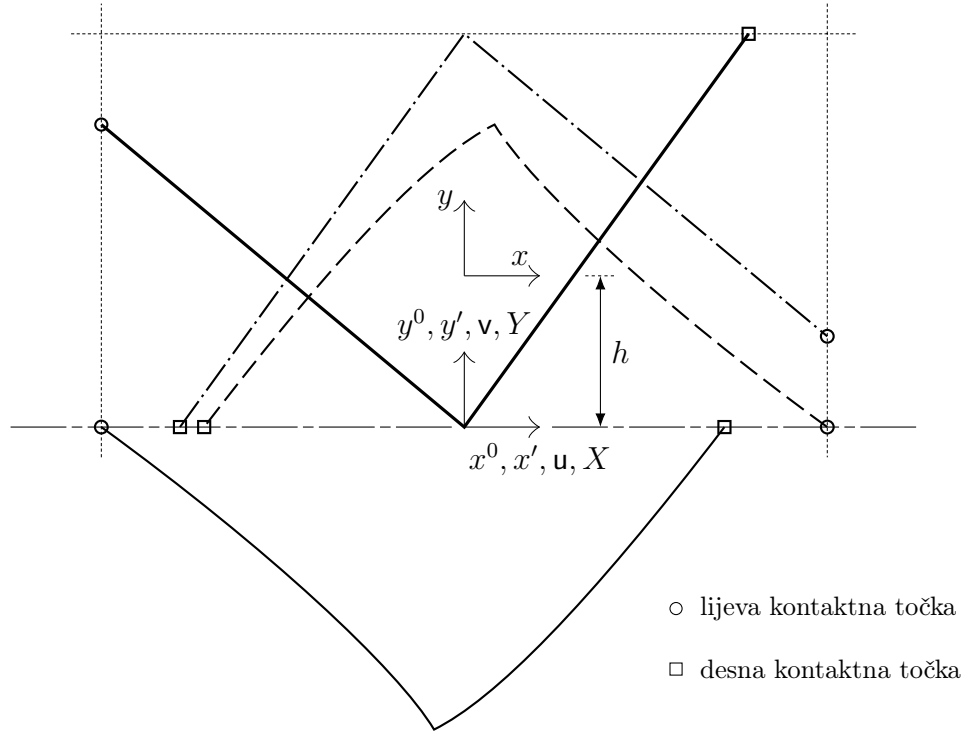
U simetričnom slučaju prodiranja tijela kroz tekućinu vertikalni položaji kontaktnih točaka na obje strane nalaze se na istoj vertikalnoj koordinati $y_{CL} = y_{CR}$ pa vrijedi:

$$\mathcal{J} = 1 .$$

4.3.2. Preslikavanje iz fizikalne u proračunsku domenu

Da bi se omogućilo S-C preslikavanje potrebno je napraviti dva jednostavnija preslikavanja kojima se model iz fizikalne domene prebacuje u pomoćnu domenu z' . U fizikalnoj domeni kontura tijela opisana je u koordinatnom sustavu čije ishodište

je smješteno na neporemećenoj slobodnoj površini. Prvo preslikavanje je translacija iz fizikalne domene \mathcal{D} u domenu z^0 čije ishodište koordinatnog sustava je smješteno na osnovici poprečnog presjeka (Slika 4.6). Drugo preslikavanje iz domene z^0 u z' predstavlja asimetrično zrcaljenje u odnosu na vertikalnu os fizikalnog koordinatnog sustava. Sljedeće je S-C preslikavanje iz z' u w , a posljednje je iz domene w u proračunsku domenu $\overline{\mathcal{D}}$ rotacijom oko ishodišta za kut π .



Slika 4.6: Primjer preslikavanja domena $\mathcal{D} \rightarrow z_0 \rightarrow z' \rightarrow w \rightarrow \overline{\mathcal{D}}$

Matematički zapisano preslikavanja imaju sljedeći oblik:

$$\mathcal{D} \rightarrow z^0 \quad x^0 = x \quad y^0 = y + h \quad (4.12)$$

$$z^0 \rightarrow z' \quad x' = -x^0 \quad y' = h + \max(e_1, e_2) - y^0 \quad (4.13)$$

$$z' \rightarrow w \quad \frac{dz'}{dw} = \sqrt{\frac{\pi w - \text{sign}(e_1 - e_2)h}{\pi w + \text{sign}(e_1 - e_2)h}} \quad w^{(n+1)} = w^{(n)} - \frac{f(w^{(n)})}{\frac{dz'}{dw}(w^{(n)})} \quad (4.14)$$

$$w \rightarrow \overline{\mathcal{D}} \quad X = -u \quad Y = -v \quad (4.15)$$

4.3.3. Rubni problem za nesimetričan uron

Nakon preslikavanja u proračunsku ravninu $\overline{\mathcal{D}}$ (Slika 4.7) problem se ponovo formuliše s obzirom da su se zbog promjene geometrije tijela ($\mathcal{S}_{\text{op}} \rightarrow \overline{\mathcal{S}}_{\text{op}}$) i položaja slobodne površine ($\mathcal{S}_{\text{sp}} \rightarrow \overline{\mathcal{S}}_{\text{sp}}$) promijenili i rubni uvjeti (Slika 4.7):

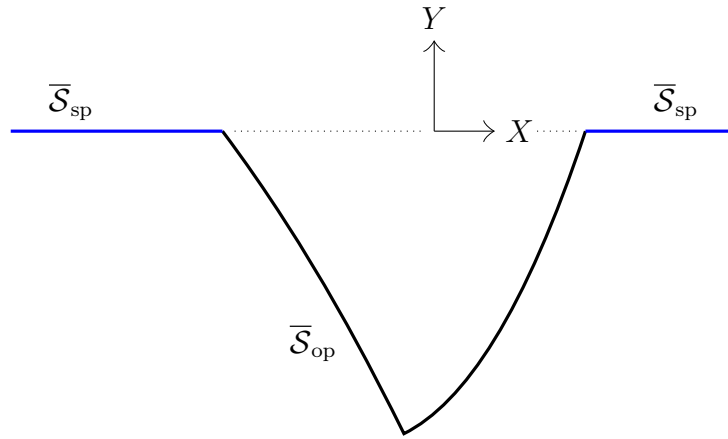
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} = 0 \quad \text{na } \overline{\mathcal{D}} \quad (4.16)$$

$$\phi = 0 \quad \text{na } \overline{\mathcal{S}}_{\text{sp}} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{\mathcal{J}} \frac{\partial \phi}{\partial Y} \quad \text{na } \overline{\mathcal{S}}_{\text{sp}} \quad (4.18)$$

$$\frac{1}{|\mathcal{J}|} \frac{\partial \phi}{\partial n} = \vec{V} \cdot \vec{n} \quad \text{na } \overline{\mathcal{S}}_{\text{op}} \quad (4.19)$$

$$\phi \rightarrow 0 \quad \text{na } X^2 + Y^2 \rightarrow \infty \quad (4.20)$$

Slika 4.7: Proračunska domena $\overline{\mathcal{D}}$

4.4. Rješavanje metodom rubnih elemenata

Desingularizacijom potencijala brzine te uvrštavanjem rubnog uvjeta na oplakanoj površini tijela, integralna jednadžba (4.1) postaje:

$$\frac{1}{2} \Sigma(P) \tilde{\phi}(P) = \int_{\mathcal{S}} \left(\vec{V} \cdot \vec{n} G^0(P, Q) - \Sigma(Q) \tilde{\phi}(Q) \frac{\partial G^0(P, Q)}{\partial n} \right) d\mathcal{S} \quad (4.21)$$

Rješenje jednadžbe (4.21) traži se metodom rubnih elemenata preko kolokacijskog pristupa pri čemu se oplakana površina podijeli na N ravni segmenata. Nepoznata funkcija regularnog dijela potencijala brzine aproksimira se funkcijom $\tilde{\phi}_n$:

$$\tilde{\phi}_n(s) = \sum_{j=1}^N \tilde{\phi}_j \lambda_j(s), \quad s \in \mathcal{S} \quad (4.22)$$

$$\lambda_j(s) = \begin{cases} 1 & \text{za } s \in \mathcal{S}_j \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

gdje su $\tilde{\phi}_j$ koeficijenti, $\lambda_j = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ bazne funkcije, a \mathcal{S}_j domena pojedinog segmenta odnosno rubnog elementa.

Uvrštavanjem aproksimacijske funkcije $\tilde{\phi}_n$ u (4.21) te uz $\Sigma = \Sigma_L \Sigma_R$, integralna jednadžba nakon sređivanja prelazi u:

$$\sum_{j=1}^N \tilde{\phi}_j \left(\frac{1}{2} \delta_{ij} \Sigma_L(P) \Sigma_R(P) + \int_{\mathcal{S}_j} \Sigma_L(Q) \Sigma_R(Q) \frac{\partial G^0}{\partial n} d\mathcal{S}_j \right) = \sum_{j=1}^N \vec{V}_j \cdot \vec{n}_j \int_{\mathcal{S}_j} G^0 d\mathcal{S}_j$$

$$i = 1, \dots, N \quad (4.23)$$

gdje je δ_{ij} Kronecker delta. Koeficijenti $\tilde{\phi}_j$ predstavljaju nepoznate vrijednosti regularnog potencijala brzine na svakom pojedinom segmentu.

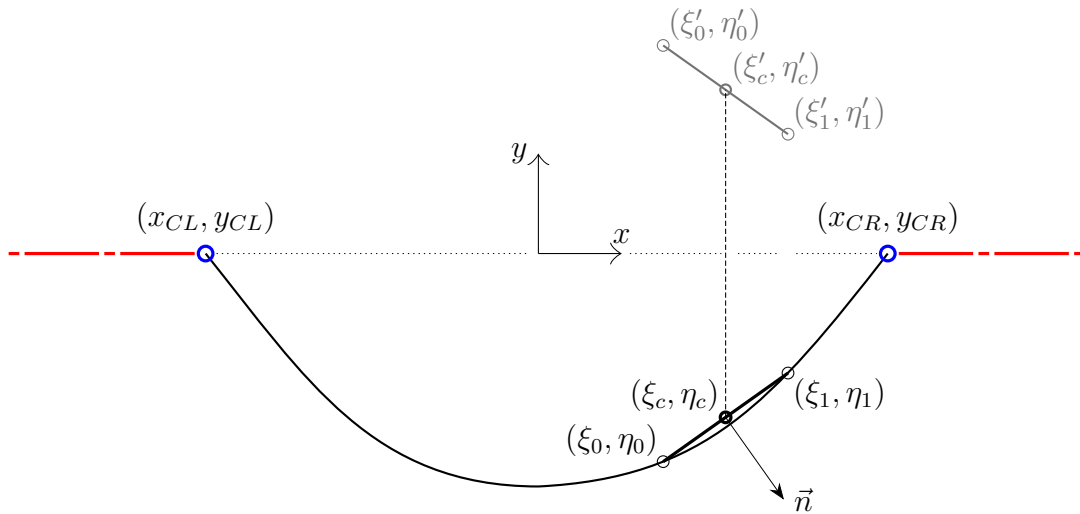
4.4.1. Utjecajni koeficijenti

U integralnoj jednadžbi (4.23) javljaju se dva tipa integrala koje treba izračunati ili analitički ili numerički:

$$I_{(1)} = \int_{\mathcal{S}_j} \Sigma_L \Sigma_R \frac{\partial G^0}{\partial n} d\mathcal{S}_j \quad \text{ i } \quad I_{(2)} = \int_{\mathcal{S}_j} G^0 d\mathcal{S}_j.$$

Parametrizacija segmentne krivulje

S obzirom da podintegralne funkcije, uz varijable x, y, ξ i η , ovise i o varijablama ξ' i η' što je posljedica korištenja Greenove funkcije Kelvinovog tipa, parametrizaciju pojedinog segmenta potrebno je provesti u proračunskom koordinatnom sustavu tijela, a ne u lokalnom sustavu pojedinog segmenta kao što je napravljeno u osnovnoj poopćenoj Wagnerovoj metodi.



Slika 4.8: Položaj segmenta na oplakanoj površini i parametri kojima se opisuje

Bijektivna funkcija kojom se parametrizira pravac kojim se aproksimira segmentna krivulja definira se na sljedeći način:

$$f_s(s) = \begin{cases} \xi = \xi_c - \frac{1}{2}s l n_\eta \\ \eta = \eta_c + \frac{1}{2}s l n_\xi \end{cases}, \quad s \in [-1, 1] \quad (4.24)$$

gdje su (ξ_c, η_c) koordinate kolokacijske točke smještene na sredini segmentne krivulje, l duljina segmenta, a $\vec{n}(\xi, \eta) = (n_\xi, n_\eta)$ jedinični vektor normale segmenta usmjeren prema domeni strujanja. Komponente vektora normale u proračunskom koordinatnom sustavu računaju se iz izraza:

$$\begin{aligned} n_\xi &= \sin \theta = \frac{\eta_1 - \eta_0}{l} \\ n_\eta &= -\cos \theta = -\frac{\xi_1 - \xi_0}{l} \end{aligned} \quad (4.25)$$

gdje su (ξ_0, η_0) odnosno (ξ_1, η_1) koordinate definicijskih točaka segmenta. Nakon parametrizacije diferencijal dS_j prelazi u:

$$dS_j = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2} = \frac{1}{2} l ds \quad (4.26)$$

Parametrizacija podintegralnih funkcija

Derivacija Kelvinove Greenove funkcije u smjeru normale segmentne krivulje:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^0}{\partial n} &= \nabla G^0 \cdot \vec{n}(\xi, \eta) = n_\xi \frac{\partial G^0}{\partial \xi} + n_\eta \frac{\partial G^0}{\partial \eta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-n_\xi(x - \xi) - n_\eta(y - \eta)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} - \frac{-n_\xi(x - \xi) + n_\eta(y + \eta)}{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2} \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Nakon uvrštavanja (4.6), (4.27) i (4.2) integrali $I_{(1)}$ i $I_{(2)}$ poprimaju sljedeći oblik:

$$\begin{aligned} I_{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{S_j} r_L^{\gamma_L} r_R^{\gamma_R} \left(\frac{-n_\xi(x - \xi) - n_\eta(y - \eta)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} - \frac{-n_\xi(x - \xi) + n_\eta(y + \eta)}{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2} \right) dS_j \\ I_{(2)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{S_j} \left(\ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} - \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2} \right) dS_j \end{aligned} \quad (4.28)$$

Parametrizirani oblik funkcije r_L (4.7) duž segmentne krivulje (pri čemu $x = \xi$ i $y = \eta$):

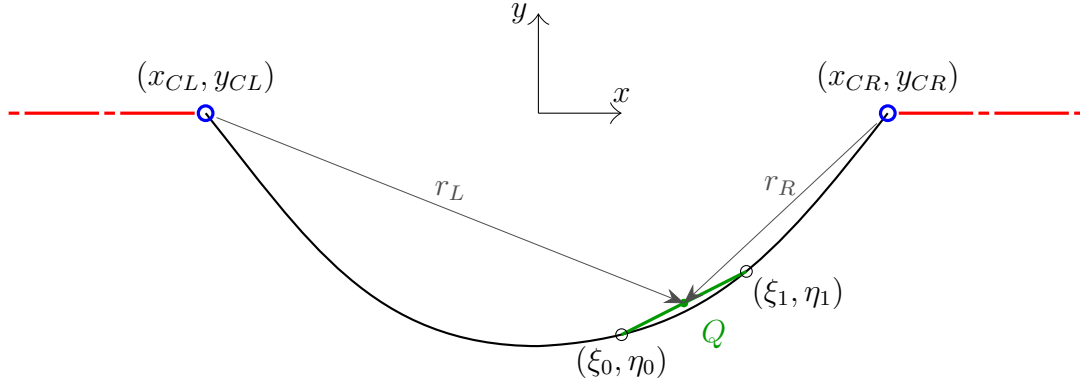
$$r_L = \frac{l}{2} \sqrt{s^2 + \frac{4}{l} \left(n_\xi(\eta_c - y_{CL}) - n_\eta(\xi_c - x_{CL}) \right) s + \frac{4}{l^2} \left((\xi_c - x_{CL})^2 + (\eta_c - y_{CL})^2 \right)}$$

U pojednostavljenom obliku funkcija r_L prelazi u:

$$r_L = \frac{l}{2} \sqrt{s^2 + B_L s + C_L} \quad (4.29)$$

gdje su koeficijenti B_L i B_R definirani na sljedeći način:

$$\begin{aligned} B_L &= \frac{4}{l} \left(n_\xi(\eta_c - y_{CL}) - n_\eta(\xi_c - x_{CL}) \right) \\ C_L &= \frac{4}{l^2} \left((\xi_c - x_{CL})^2 + (\eta_c - y_{CL})^2 \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$



Slika 4.9: Parametrizacija funkcija r_L i r_R duž segmenta

Funkcija r_R duž segmentne krivulje parametrizira se na jednak način kao i funkcija r_L :

$$r_R = \frac{l}{2} \sqrt{s^2 + B_R s + C_R} \quad (4.31)$$

gdje su koeficijenti:

$$\begin{aligned} B_R &= \frac{4}{l} \left(n_\xi(\eta_c - y_{CR}) - n_\eta(\xi_c - x_{CR}) \right) \\ C_R &= \frac{4}{l^2} \left((\xi_c - x_{CR})^2 + (\eta_c - y_{CR})^2 \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Nakon uvrštavanja parametrizirane funkcije segmentne krivulje (4.24) u derivaciju Greenove funkcije u smjeru normale (4.27) i sređivanja dobiva se sljedeće:

$$\frac{\partial G^0}{\partial n} = \frac{2}{\pi l^2} \left(\frac{D_1}{s^2 + B_1 s + C_1} - \frac{D_2}{s^2 + B_2 s + C_2} \right) \quad (4.33)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{4}{l} \left(n_\eta(x - \xi_0) - n_\xi(y - \eta_0) \right) \\ B_2 &= \frac{4}{l} \left(n_\eta(x - \xi_0) + n_\xi(y + \eta_0) \right) \\ C_1 &= \frac{4}{l^2} \left((x - \xi_0)^2 + (y - \eta_0)^2 \right) \\ C_2 &= \frac{4}{l^2} \left((x - \xi_0)^2 + (y + \eta_0)^2 \right) \\ D_1 &= - \left(n_\xi(x - \xi_0) + n_\eta(y - \eta_0) \right) \\ D_2 &= - \left(n_\xi(x - \xi_c) - n_\eta(y + \eta_c) \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Uvrštavanjem parametriziranih funkcija utjecajni koeficijenti (4.28) postaju:

$$\begin{aligned}
 I_{(1)} &= \frac{1}{\pi l} \int_{-1}^1 \left(\frac{l}{2} \sqrt{s^2 + B_L s + C_L} \right)^{\gamma_L} \left(\frac{l}{2} \sqrt{s^2 + B_R s + C_R} \right)^{\gamma_R} \\
 &\quad \left(\frac{D_1}{s^2 + B_1 s + C_1} - \frac{D_2}{s^2 + B_2 s + C_2} \right) ds \\
 I_{(2)} &= \frac{l}{4\pi} \int_{-1}^1 \left(\ln \sqrt{s^2 + B_1 s + C_1} - \ln \sqrt{s^2 + B_2 s + C_2} \right) ds
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Rješavanje integrala

Analitičko rješenje prvog tipa integrala $I_{(1)}$ vrlo je teško pronaći jer se u podintegralnoj funkciji javljaju dva izraza potencirana s racionalnim brojem (γ_L i γ_R). Jedan od načina zaobilazanja problema sastoji se od aproksimacije problematičnog dijela podintegralne funkcije s polinomom drugog ili nekog višeg stupnja. U tom slučaju podintegralna funkcija poprimila bi oblik za koji bi se moglo naći analitičko rješenje integrala.

S obzirom na oblik funkcije koja predstavlja singularni dio potencijala brzine (slika 4.3) aproksimacija po dijelovima polinomom određenog stupnja čini se razumnim izborom osim u području u neposrednoj okolini kontaktnih točaka. Naime, u blizini kontaktnih točaka funkcija $\Sigma = f(r_L, r_R)$ (Slika 4.3) ima visoki gradijent što povlači odabir većeg broja segmenata kako bi se dobila točnija aproksimacija podintegralne funkcije. Bez obzira na brojnost i gustoću segmenata oko kontaktnih točaka, zadovoljavajuća točnost može se postići samo numeričkim integriranjem.

Gaussova integracijska formula:

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \tag{4.36}$$

gdje je ω težinska funkcija koja je pozitivna na intervalu $[a, b]$, a w_i težinski koeficijenti odnosno težine integracijske formule.

Za drugi tip integrala $I_{(2)}$ analitičko rješenje postoji:

$$\begin{aligned}
 I_{(2)} &= \frac{l}{4\pi} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{(1 + C_1)^2 - B_1^2}{(1 + C_2)^2 - B_2^2} + \right. \\
 &\quad \frac{1}{4} B_1 \ln \frac{1 + B_1 + C_1}{1 - B_1 + C_1} - \frac{1}{4} B_2 \ln \frac{1 + B_2 + C_2}{1 - B_2 + C_2} + \\
 &\quad \frac{2D_1}{l} \left(\arctan \frac{l(B_1 + 2)}{4D_1} - \arctan \frac{l(B_1 - 2)}{4D_1} \right) - \\
 &\quad \left. \frac{2D_2}{l} \left(\arctan \frac{l(B_2 + 2)}{4D_2} - \arctan \frac{l(B_2 - 2)}{4D_2} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

4.4.2. Brzine fluida na slobodnoj površini

S obzirom da se uslijed korištenja Kelvinove Greenove funkcije premrežuje samo oplakana površina tijela, vertikalne brzine čestica na slobodnoj površini ne dobivaju se direktno numeričkim rješavanjem integralne jednadžbe (4.23) nego ih je potrebno izračunati drugim putem. Parcijalnim deriviranjem po varijabli y i uvrštavanjem rubnog uvjeta na oplakanoj površini (2.46) integralna jednadžba (4.21) postaje:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi(P)}{\partial y} = \vec{V} \cdot \vec{n} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\mathcal{S}} G^0(P, Q) d\mathcal{S} - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\mathcal{S}} \Sigma(Q) \tilde{\phi}(Q) \frac{\partial G^0(P, Q)}{\partial n} d\mathcal{S} \quad (4.38)$$

gdje je $P(x, y)$ točka na bilo kojem dijelu ruba domene, $Q(\xi, \eta)$ točka isključivo na oplakanoj površini tijela \mathcal{S} , ϕ potencijal brzine, a $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ vertikalna brzina fluida.

Proračun vertikalnih brzina fluida podrazumijeva da se točka P nalazi isključivo na proračunskoj slobodnoj površini. Budući da se točka Q nalazi na oplakanoj površini parcijalna derivacija po y može se bez ograničenja uvući pod integral. Označavajući s \bar{P} točku na proračunskoj slobodnoj površini te uz $\Sigma = \Sigma_L \Sigma_R$, jednadžba za računanje vertikalnih brzina fluida prelazi u:

$$\frac{\partial \phi(\bar{P})}{\partial y} = 2 \vec{V} \cdot \vec{n} \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial G^0(\bar{P}, Q)}{\partial y} d\mathcal{S} - 2 \int_{\mathcal{S}} \Sigma_L(Q) \Sigma_R(Q) \tilde{\phi}(Q) \frac{\partial^2 G^0(\bar{P}, Q)}{\partial y \partial n} d\mathcal{S} \quad (4.39)$$

Uvrštavanjem aproksimacijske funkcije $\tilde{\phi}_n$ (4.22), gornji izraz prelazi u oblik pogodan za numeričko rješavanje:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_i = 2 \sum_{j=1}^N \vec{V}_j \cdot \vec{n}_j \int_{\mathcal{S}_j} \frac{\partial G^0}{\partial y} d\mathcal{S}_j - 2 \sum_{j=1}^N \tilde{\phi}_j \int_{\mathcal{S}_j} \Sigma_L \Sigma_R \frac{\partial^2 G^0}{\partial y \partial n} d\mathcal{S}_j \quad (4.40)$$

$i = 1, \dots, M$

gdje je M broj točaka na proračunskoj slobodnoj površini u kojima se računa vertikalna brzina.

Parametarski oblik integrala iz (4.40) dobiva se deriviranjem pointegralnih funkcija utjecajnih koeficijenata (4.28):

$$\bar{I}_{(1)} = \frac{1}{\pi l} \int_{-1}^1 \left(\frac{l}{2} \sqrt{s^2 + B_L s + C_L} \right)^{\gamma_L} \left(\frac{l}{2} \sqrt{s^2 + B_R s + C_R} \right)^{\gamma_R} \left(\frac{4D_1(2(y - \eta_0) - l n_{\xi} s)}{l^2 (s^2 + B_1 s + C_1)^2} - \frac{n_{\eta}}{s^2 + B_1 s + C_1} - \frac{4D_2(2(y + \eta_0) + l n_{\xi} s)}{l^2 (s^2 + B_2 s + C_2)^2} - \frac{n_{\eta}}{s^2 + B_2 s + C_2} \right) ds \quad (4.41)$$

$$\bar{I}_{(2)} = \frac{1}{2\pi l} \int_{-1}^1 \left(\frac{2(y - \eta_0) - l n_{\xi} s}{s^2 + B_1 s + C_1} - \frac{2(y + \eta_0) + l n_{\xi} s}{s^2 + B_2 s + C_2} \right) ds \quad (4.42)$$

Jednako kao i kod računanja utjecajnih koeficijenata prvi tip integrala $\bar{I}_{(1)}$ rješavat će se numeričkim putem korištenjem Gauss-Legendreove integracijske formule. Analitičko rješenje drugog tipa integrala $\bar{I}_{(2)}$:

$$\begin{aligned} \bar{I}_{(2)} = \frac{l}{4\pi} & \left(\frac{8}{l^2} \frac{2\eta_c (1 + \bar{C}) - n_\xi l \bar{B}}{(1 + \bar{C})^2 - \bar{B}^2} + \frac{2n_\xi}{l} \ln \frac{1 + \bar{B} + \bar{C}}{1 - \bar{B} + \bar{C}} + \right. \\ & \frac{2\bar{B}}{l^2} \frac{2\eta_c + l n_\xi}{1 + \bar{B} + \bar{C}} - \frac{2\bar{B}}{l^2} \frac{2\eta_c - l n_\xi}{1 - \bar{B} + \bar{C}} + \\ & \left. \frac{4n_\eta}{l} \left(\operatorname{arctg} \frac{l(\bar{B} + 2)}{4\bar{D}} - \operatorname{arctg} \frac{l(\bar{B} - 2)}{4\bar{D}} \right) - \right. \\ & \frac{16\bar{D} l (\bar{B} + 2) n_\eta - 4n_\xi \bar{D}}{l \left(16\bar{D}^2 + l^2 (\bar{B} + 2)^2 \right)} + \\ & \left. \frac{16\bar{D} l (\bar{B} - 2) n_\eta - 4n_\xi \bar{D}}{l \left(16\bar{D}^2 + l^2 (\bar{B} - 2)^2 \right)} \right) \quad (4.43) \end{aligned}$$

4.5. Određivanje vremenskog koraka

Određivanja vremenskog koraka temelji se na istim principima koji se koriste i kod osnovne poopćene Wagnerove metode (Poglavlje 3.3.). Kao i kod osnovne PW metode brzina strujanja u okolini kontaktne točke aproksimira se funkcijom brzine vanjskog kutnog strujanja fluida oko konveksnih klinova, ali uz dvije bitne razlike:

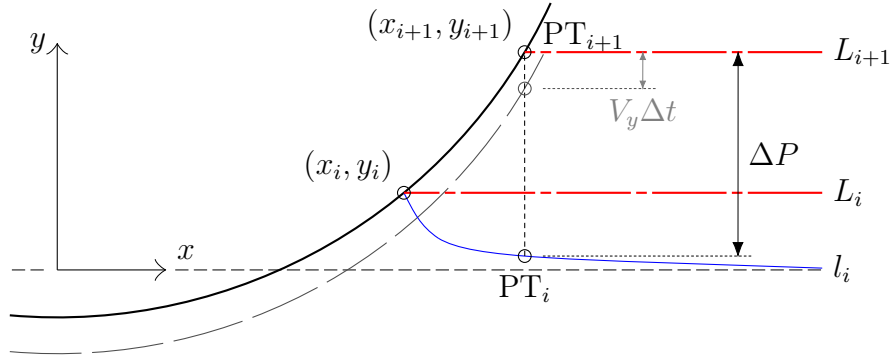
- vrijednost lokalnog nagiba tangente β na konturi tijela u kontaktnoj točki u općem slučaju nije konstantna nego se mijenja u skladu s promjenom geometrije oplakane površine
- ne uzima se srednja vrijednost konstante lokalnog rješenja za dva uzastopna vremenska koraka nego se njena promjena između dva vremenska koraka aproksimira novom funkcijom

4.5.1. Simetrični uron tijela

U slučaju simetričnog prodiranja pomak slobodne površine jednak je za obje strane tijela pa je proračun potrebno napraviti samo za jednu stranu. Kao i kod osnovne PW metode položaj tijela se ne mijenja između dva koraka (i) i $(i + 1)$ sve dok se ne odredi vrijeme Δt . Tek nakon što je poznata vrijednost Δt tijelo se pomiče vertikalno za $V_y \Delta t$.

Udaljenost ΔP između stvarne pozicije slobodne površine u trenutku t_i i kontaktne točke u trenutku t_{i+1} (Slika 4.10) računa se iz izraza:

$$\Delta P = \int_{t_i}^{t_{i+1}} W dt \quad (4.44)$$



Slika 4.10: Određivanje vremenskog koraka pri simetričnom uronu

Funkcija W predstavlja relativnu vertikalnu brzinu čestice fluida na slobodnoj površini između točaka PT_i i PT_{i+1} (Slika 4.10). S obzirom da tijelo miruje do određivanja Δt u izraz za W potrebno je uz lokalnu brzinu slobodne površine uključiti i vertikalnu brzinu tijela V_y . Stoga se relativna vertikalna brzina čestice na slobodnoj površini definira na sljedeći način:

$$W = \frac{\partial \phi}{\partial y} = K_{sp} \gamma r^{\gamma-1} + |V_y| \quad (4.45)$$

$K_{sp} = K_{sp}(x; t)$ je funkcija konstante lokalnog rješenja na slobodnoj površini uslijed strujanja oko kontaktne točke, γ varijabla ovisna o lokalnom nagibu tangente na konturi tijela u kontaktnoj točki definirana izrazom (4.8), a r udaljenost od kontaktne točke CP_{i+1} :

$$r = x_{i+1} - x \quad (4.46)$$

gdje je x_{i+1} pretpostavljeni položaj x koordinate kontaktne točke u trenutku t_{i+1} , a $x = x(t)$ funkcija promjene koordinate x kontaktne točke u vremenu pri integriranju funkcije vertikalne brzine W između t_i i t_{i+1} (Slika 4.10).

Uzimajući u obzir sve navedeno, izraz (4.44) prelazi u:

$$\Delta P = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(K_{sp}(x; t) \gamma (x_{i+1} - x(t))^{\gamma-1} + |V_y| \right) dt \quad (4.47)$$

S obzirom da vrijednost vremenskog koraka ovisi o pretpostavljenoj poziciji kontaktne točke u idućem trenutku t_{i+1} , odnosno o veličini ΔP , varijabla t zavisi o prostornoj varijabli s kojom se opisuje promjena položaja kontaktne točke iz CP_i u CP_{i+1} . Diferencijal dt iz integrala (4.47) može se prikazati u sljedećem obliku:

$$dt = \frac{dt}{ds} ds$$

Diferencijalna promjena vremenske varijable dt po diferencijalu prostorne varijable ds izlučuje se iz integrala u obliku srednje vrijednosti

$$\left(\frac{dt}{ds} \right)_m$$

Nakon integriranja drugog člana podintegralne funkcije te zamjene zavisne varijable t s nezavisnom s , integral (4.47) prelazi u:

$$\Delta P = \left(\frac{dt}{ds} \right)_m \int_{s_i}^{s_{i+1}} K_{\text{sp}}(s) \gamma(s) \left(x_{i+1} - x(s) \right)^{\gamma(s)-1} ds + |V_y| \Delta t \quad (4.48)$$

Rješavanje integrala u izrazu (4.48) podrazumijeva da je poznat oblik svih dijelova od kojih je sastavljena podintegralna funkcija. U općem slučaju nije poznata točna matematska definicija tih funkcija te je potrebno koristiti aproksimaciju koja na zadovoljavajući način opisuje njihovo ponašanje između točaka PT_i i PT_{i+1} (Slika 4.10).

Jedina iznimka je funkcija $\gamma(s)$ koja se nalazi i u eksponentu te bi u slučaju takvog pristupa integriranje bilo vrlo složeno. Da bi se izbjegle poteškoće pointegralna funkcija može se definirati koristeći samo jednu vrijednost varijable γ . Pri tome treba voditi računa da se očuva konzistentnost konstante lokalnog rješenja u skladu s vrijednošću brzine čestice fluida $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ na x koordinati između PT_i i PT_{i+1} (Slika 4.10) uslijed drugačije vrijednosti γ .

Neka PT_n označava bilo koju točku na dijelu pravca \mathfrak{P} između PT_i i PT_{i+1} :

$$\text{PT}_n \in \mathfrak{P} = [\text{PT}_i, \text{PT}_{i+1}]$$

Tada je brzina čestice fluida u točki PT_n :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \{K_{\text{sp}}\}_n \gamma_n (x_{i+1} - x_n)^{\gamma_n-1} \quad (4.49)$$

gdje je $\{K_{\text{sp}}\}_n$ konstanta lokalnog rješenja u točki PT_n , γ_n parametar koji ovisi o lokalnom nagibu tangente u odgovarajućoj točki CP_n na tijelu te x_n koordinata točke CP_n .

Ako se brzina čestice definira koristeći neku drugu vrijednost parametra γ (može se označiti s $\hat{\gamma}$) na \mathfrak{P} izraz (4.49) prelazi u:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \{\hat{K}_{\text{sp}}\}_n \hat{\gamma} (x_{i+1} - x_n)^{\hat{\gamma}-1} \quad (4.50)$$

gdje $\{\hat{K}_{\text{sp}}\}_n$ modificirana funkcija konstante lokalnog rješenja na slobodnoj površini. U slučaju da $x_n \neq x_{i+1}$ funkcija $\{\hat{K}_{\text{sp}}\}_n$ se može izračunati izjednačavanjem izraza (4.49) i (4.50):

$$\{\hat{K}_{\text{sp}}\}_n = \{K_{\text{sp}}\}_n \frac{\gamma_n (x_{i+1} - x_n)^{\gamma_n-1}}{\hat{\gamma} (x_{i+1} - x_n)^{\hat{\gamma}-1}} \quad (4.51)$$

S obzirom da je funkcija $\{\hat{K}_{\text{sp}}\}_n$ definirana na cijelom \mathfrak{P} osim u točki PT_{i+1} , odnosno CP_{i+1} , jedini mogući izbor konstantne vrijednosti $\hat{\gamma}$ je onaj iz kontaktne točke CP_{i+1} :

$$\hat{\gamma} = \gamma_{i+1}$$

Tada u točki PT_{i+1} nije potrebno računati vrijednost funkcije $\{\hat{K}_{sp}\}_n$ iz izraza (4.51) jer vrijedi:

$$\hat{K}_{sp}\Big|_{PT_{i+1}} = \overline{K}_{sp,(i+1)} \quad (4.52)$$

gdje je $\overline{K}_{sp,(i+1)}$ vrijednost konstante lokalnog rješenja u kontaktnoj točki CP_{i+1} . Zamjenom funkcije $\gamma = \gamma(s)$ s konstantnom vrijednošću γ_{i+1} izraz (4.48) prelazi u:

$$\Delta P = \left(\frac{dt}{ds}\right)_m \int_{s_i}^{s_{i+1}} \hat{K}_{sp}(s) \gamma_{i+1} (x_{i+1} - x(s))^{\gamma_{i+1}-1} ds + |V_y| \Delta t \quad (4.53)$$

Između položaja s_i i s_{i+1} funkcije $\hat{K}_{sp}(s)$ i $x(s)$ aproksimiraju se linearnom funkcijom:

$$\begin{aligned} \hat{K}_{sp}(s) &= \hat{K}_i + \frac{s - s_i}{s_{i+1} - s_i} (\hat{K}_{i+1} - \hat{K}_i) \\ x(s) &= x_i + \frac{s - s_i}{s_{i+1} - s_i} (x_{i+1} - x_i) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Uvođenjem nove varijable

$$\bar{s} = \frac{s - s_i}{s_{i+1} - s_i} ; \quad ds = (s_{i+1} - s_i) d\bar{s}$$

te uz

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)_m = \frac{\Delta t}{s_{i+1} - s_i}$$

izraz (4.53) prelazi u

$$\Delta P = \gamma_{i+1} \Delta t \int_0^1 \left(\hat{K}_i + (\hat{K}_{i+1} - \hat{K}_i) \bar{s} \right) \left((x_{i+1} - x_i)(1 - \bar{s}) \right)^{\gamma_{i+1}-1} d\bar{s} + |V_y| \Delta t$$

koji nakon sređivanja postaje:

$$\Delta P = \gamma_{i+1} (x_{i+1} - x_i)^{\gamma_{i+1}-1} \Delta t \left(\hat{K}_i I_1 + (\hat{K}_{i+1} - \hat{K}_i) I_2 \right) + |V_y| \Delta t \quad (4.55)$$

gdje su

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (1 - \bar{s})^{\gamma_{i+1}-1} d\bar{s} \\ I_2 &= \int_0^1 \bar{s} (1 - \bar{s})^{\gamma_{i+1}-1} d\bar{s} \end{aligned}$$

Vrijeme potrebno za pomak iz kontaktne točke CP_i u CP_{i+1} :

$$\Delta t = \frac{\Delta P}{\gamma_{i+1} (x_{i+1} - x_i)^{\gamma_{i+1}-1} \left(\hat{K}_i I_1 + (\hat{K}_{i+1} - \hat{K}_i) I_2 \right) + |V_y|} \quad (4.56)$$

S obzirom da su u neposrednoj blizini kontaktne točke brzine na slobodnoj površini vrlo velike, što je u skladu s lokalnim rješenjem za vanjsko strujanje oko konveksnih kutova, lijevi član u nazivniku (4.56) za red veličine je veći od vrijednosti vertikalne brzine tijela V_y te se ista može izostaviti bez većeg utjecaja na konačni rezultat.

4.5.2. Nesimetrični uron tijela

Kod nesimetričnog urona vertikalni pomaci slobodne površine na lijevoj odnosno desnoj strani međusobno se razlikuju te je stoga potrebno napraviti proračun vremenskog koraka za obje strane tijela. S obzirom da vrijednost vremenskog koraka u oba slučaja treba biti jednaka do traženog rješenja dolazi se iteracijom.

Postupak iteracije provodi se mijenjanjem procijenjenog položaja kontaktne točke (x_{i+1}, y_{i+1}) na odabranoj strani tijela uz fiksiranje istog na suprotnoj strani. Procjena položaja kontaktne točke u trenutku t_{i+1} provodi se korištenjem brzina gibanja kontaktnih točaka duž koordinate s koja prati konturu tijela i procijenjene vrijednosti Δt .

Prva procjena novog vremenskog koraka Δt_0 dobiva se dijeljenjem pretpostavljene duljine uranjanja oplakane površine Ds_0 s većom vrijednošću između dviju brzina kontaktnih točaka iz prethodnog trenutka t_i :

$$\Delta t_0 = \frac{Ds_0}{\max\left(\frac{ds_L}{dt}, \frac{ds_R}{dt}\right)} \quad (4.57)$$

Nakon što je vrijednost vremenskog koraka procijenjena računaju se položaji kontaktnih točaka u idućem vremenskom trenutku:

$$\begin{aligned} (s_L)_{i+1} &= (s_L)_i + \Delta t_0 \frac{ds_L}{dt} \\ (s_R)_{i+1} &= (s_R)_i + \Delta t_0 \frac{ds_R}{dt} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Slijedi rješavanje rubnog problema s novim položajima kontaktnih točaka pri čemu se dobivaju dvije nove vrijednosti vremenskog koraka (Δt_L i Δt_R). Na osnovi dobivenih vrijednosti računaju se brzine promjene kontaktnih točaka duž konture tijela:

$$\begin{aligned} \frac{ds_L}{dt} &= \frac{(s_L)_{i+1} - (s_L)_i}{\Delta t_L} \\ \frac{ds_R}{dt} &= \frac{(s_R)_{i+1} - (s_R)_i}{\Delta t_R} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Ako je razlika između dvije vrijednosti vremenskog koraka veća od neke unaprijed propisane tolerancije $|\Delta t_L - \Delta t_R| > \epsilon$ tada se postupak ponavlja ponovnom procjenom početnog vremenskog koraka Dt na sljedeći način:

$$\text{ako je } \frac{ds_L}{dt} > \frac{ds_R}{dt} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta t_{\text{proc}} = \Delta t_L \\ (s_R)_{i+1} = (s_R)_i + \Delta t_{\text{proc}} \frac{ds_R}{dt} \\ (s_L)_{i+1} \text{ ostaje nepromijenjen} \end{array} \right. \quad (4.60)$$

$$\text{ako je } \frac{ds_R}{dt} > \frac{ds_L}{dt} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta t_{\text{proc}} = \Delta t_R \\ (s_L)_{i+1} = (s_L)_i + \Delta t_{\text{proc}} \frac{ds_L}{dt} \\ (s_R)_{i+1} \text{ ostaje nepromijenjen} \end{array} \right. \quad (4.61)$$

U početnom koraku proračuna nije moguće izvršiti procjenu vrijednosti Δt_0 kako je opisano izrazom (4.57) s obzirom da su brzine gibanja kontaktnih točaka jednake nuli. Zbog toga se vremenski korak za početni trenutak ne određuje nego se radi procjena pomaka kontaktnih točaka s lijeve Δs_L odnosno desne Δs_R strane tijela. Nakon rješavanja rubnog problema računaju se brzine $\frac{ds_L}{dt}$ i $\frac{ds_R}{dt}$, a ovisno o tome kako im se međusobno odnose vrijednosti moguća su dva slučaja:

$$\text{ako je } \frac{ds_L}{dt} > \frac{ds_R}{dt} \quad \left\{ \begin{array}{ll} (s_R)_{i+1} & \text{pretražuje se } \langle 0, \Delta s_L \rangle \\ (s_L)_{i+1} & \text{ostaje nepromijenjen} \end{array} \right. \quad (4.62)$$

$$\text{ako je } \frac{ds_L}{dt} < \frac{ds_R}{dt} \quad \left\{ \begin{array}{ll} (s_R)_{i+1} & \text{ostaje nepromijenjen} \\ (s_L)_{i+1} & \text{pretražuje se } \langle 0, \Delta s_R \rangle \end{array} \right. \quad (4.63)$$

4.6. Stvaran oblik slobodne površine u trenutku t_{i+1}

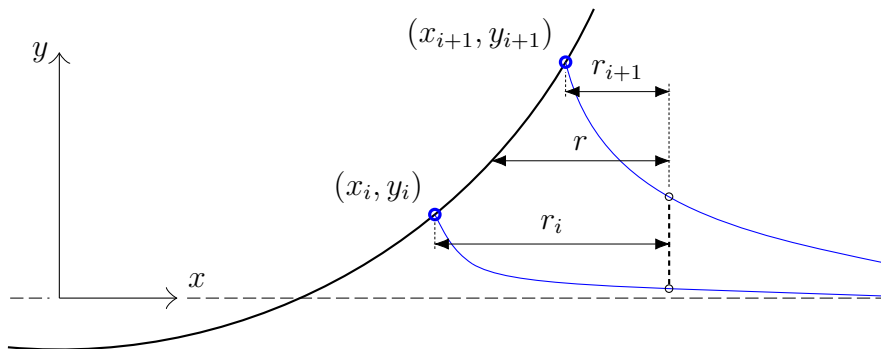
Slobodna površina dobiva se integracijom kinematičkog rubnog uvjeta u fizičkoj domeni \mathcal{D} . Brzina čestice fluida na slobodnoj površini izražava se pomoću lokalnog rješenja vanjskog kutnog strujanja (Poglavlje 2.4.2.):

$$\frac{\partial \mathcal{Y}_{\text{sp}}}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \{K_{\text{sp}}\}_n \gamma r^{\gamma-1} \quad (4.64)$$

Integriranjem po vremenskoj varijabli slijedi:

$$\mathcal{Y}_{\text{sp}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{K_{\text{sp}}\}_n \gamma_{i+1} r^{\gamma_{i+1}-1} dt \quad (4.65)$$

gdje je \mathcal{Y}_{sp} vertikalni položaj slobodne površine, $\{K_{\text{sp}}\}_n = \{K_{\text{sp}}\}_n(t)$ funkcija konstante lokalnog rješenja slobodne površine za točku n u kojoj se računa \mathcal{Y}_{sp} , γ_{i+1} varijabla ovisna o lokalnom nagibu tangente na konturi tijela u kontaktnoj točki u trenutku t_{i+1} (4.8), a $r = r(t)$ funkcija horizontalne udaljenosti od pozicije gdje se računa \mathcal{Y}_{sp} do kontaktne točke na oplakanoj površini tijela (Slika 4.11).



Slika 4.11: Vrijednosti funkcije $r(t)$ mjerene od pozicije u kojoj se računa \mathcal{Y}_{sp}

Ako se uvede pomoćna vremenska varijabla τ definirana na sljedeći način:

$$\tau = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} d\tau = \frac{dt}{t_{i+1} - t_i} = \frac{dt}{\Delta t}$$

nakon uvrštavanja izraz (4.65) prelazi u:

$$\mathcal{Y}_{\text{sp}} = \Delta t \int_0^1 \{K_{\text{sp}}\}_n(\tau) \gamma_{i+1} r(\tau)^{\gamma_{i+1}-1} d\tau \quad (4.66)$$

gdje je $\tau = 0$ za $t = t_i$ odnosno $\tau = 1$ za $t = t_{i+1}$.

Između dvaju vremenskih trenutaka t_i i t_{i+1} nepoznate funkcije $\{K_{\text{sp}}\}_n$ i r aproksimiraju se linearnom funkcijom na sljedeći način:

$$\{K_{\text{sp}}\}_n = \hat{K}_i + (K_{i+1} - \hat{K}_i)\tau \quad (4.67)$$

$$r = r_i + (r_{i+1} - r_i)\tau \quad (4.68)$$

gdje je \hat{K}_i modificirana funkcija konstante lokalnog rješenja (4.50) u trenutku t_i koja se računa iz izraza:

$$\hat{K}_i = K_i \frac{\gamma_i r^{\gamma_i-1}}{\gamma_{i+1} r^{\gamma_{i+1}-1}} \quad (4.69)$$

gdje je K_i vrijednost konstante lokalnog rješenja u kontaktnoj točki u trenutku t_i (4.51).

Uvrštavanjem svih izvedenih varijabli u (4.66) te integriranjem dobiva se konačan izraz za računanje stvarnog oblika slobodne površine u trenutku t_{i+1} :

$$\mathcal{Y}_{\text{sp}_{i+1}} = \mathcal{Y}_{\text{sp}_i} + \gamma_{i+1} \Delta t \int_0^1 \left(\hat{K}_i + (K_{i+1} - \hat{K}_i)\tau \right) \left(r_i + (r_{i+1} - r_i)\tau \right) d\tau \quad (4.70)$$

4.7. Računanje tlaka

Tlak se računa pomoću Cauchy-Lagrangeovog integrala u lokalnom koordinatnom sustavu tijela čije ishodište je smješteno na neporemećenoj slobodnoj površini. Promjena potencijala u vremenu izražava pomoću koncepta poopćene materijalne derivacije:

$$p = -\rho \left(\frac{D\phi}{Dt} - \vec{U} \cdot \nabla \phi \right) - \frac{\rho}{2} \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)^2 \right)$$

Vrijednosti $\frac{D\phi}{Dt}$, \vec{U} i $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ računaju se na način kako je opisano izrazima (3.46), (3.47) odnosno (3.48) u Poglavlju 3.5. U odnosu na osnovnu PW metodu tangencijalnu komponentu gradijenta potencijala brzine moguće je djelomično izračunati i analitički zahvaljujući desingularizaciji ukupnog potencijala (4.4). Deriviranjem umnoška funkcija singularnog i regularnog dijela potencijala po varijabli s koja opisuje konturu tijela dobiva se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial s} \Sigma + \frac{\partial \Sigma}{\partial s} \tilde{\phi} \quad (4.71)$$

gdje je Σ singularni dio potencijala brzine definiran izrazom (4.5), a $\tilde{\phi}$ regularni dio potencijala.

S obzirom da funkcija $\tilde{\phi}$ ima mali gradijent na oplakanoj površini promjena iste duž konture tijela u točki j može se računati preko sheme 1. reda:

$$\left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial s}\right)_j = \frac{\tilde{\phi}_{s+d_b} - \tilde{\phi}_{s-d_a}}{d_a + d_b} \quad (4.72)$$

gdje su d_a i d_b Euklidske udaljenosti između kolokacijske točke (j) u kojoj se računa derivacija i dviju najbližih točaka ($j-1$) odnosno ($j+1$) (Slika 3.8).

Derivacija funkcije singularnog dijela potencijala (4.5) po varijabli s računa se iz sljedećeg izraza:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial s} = \gamma_L r_L^{\gamma_L-1} r_R^{\gamma_R} \frac{dr_L}{ds} + \gamma_R r_L^{\gamma_L} r_R^{\gamma_R-1} \frac{dr_R}{ds} \quad (4.73)$$

gdje su γ_L i γ_R definirani s (4.8), r_L i r_R s (4.7), a promjena funkcija Euklidske udaljenosti od kontaktnih točaka:

$$\frac{dr_L}{ds} = \frac{n_x(y - y_{CL}) - n_y(x - x_{CL})}{r_L} \quad (4.74)$$

$$\frac{dr_R}{ds} = \frac{n_x(y - y_{CR}) - n_y(x - x_{CR})}{r_R} \quad (4.75)$$

Komponente vektora normale n_x i n_y definirane su izrazima (3.54).

4.8. Verifikacija poboljšane poopćene Wagnerove metode

Verifikacija je provedena usporedbom rezultata nove metode s postojećim metodama proračuna prodiranja tijela kroz tekućinu. Odabrana su dva karakteristična primjera: tijelo klinastog i cilindričnog poprečnog presjeka. Klin je u literaturi najčešće korišten primjer pri verifikaciji novih numeričkih metoda ponajprije zbog postojanja pouzdanih analitičkih modela koje za klinaste presjeke daju egzaktna rješenja. Karakteristika klinastih presjeka je da pri prodiranju s konstantnom vertikalnom brzinom generiranju tlak čija vršna vrijednost ostaje konstantna tijekom trajanja proračuna, a mijenja se samo prostorna raspodjela.

Cilindrični polukružni presjek je odabran jer je u matematičkom smislu kružnica jedini tip krivulje s konstantnom zakrivljenošću čija vrijednost je konačna. Na presjecima s kružnom formom rezultati proračuna kao što je tlak imaju sličan oblik ponašanja kao i kod klinova koji prodiru s konstantnom kutnom brzinom ω_{roll} . Naime, presjeci ravne forme također imaju konstantnu zakrivljenost, ali s vrijednošću koja nije konačna. U slučaju ljuštenja s kutnom brzinom koja se ne mijenja u vremenu zakrivljenost forme između vremenskih trenutaka mijenja se s konstantom.

4.8.1. Primjer 1 – simetrični klin

Odabrana su četiri klina s nagibima od 4° , 15° , 30° i 45° . Prvi korak u verifikaciji je određivanje u kojoj mjeri je postignuto poboljšanje novom formulacijom problema korištenjem Kelvinove Greenove funkcije i desingularizacijom potencijala u domeni strujanja. Najjednostavniji način za to učiniti je usporedbom ponašanja funkcije konstante lokalnog rješenja u okolini kontaktne točke. Analiza je napravljena na sljedećim formulacijama:

- osnovna poopćena Wagnerova metoda
- nova formulacija poboljšane poopćene Wagnerove metode korištenjem Kelvinove Greenove funkcije, ali bez desingularizacije potencijala
- nova formulacija PPW s uključenim svim parametrima poboljšanja
- analitičko rješenje za klinove Meija i sur. [39] koje je odabrano za referentnu metodu

Prema teorijskom modelu vanjskog strujanja oko kuteva funkcija konstante lokalnog rješenja u kontaktnoj točki na oplakanoj površini tijela teži ka istoj vrijednosti nevezano da li se točki približava sa strane slobodne površine (na kojoj vrijedi $\{\phi = 0; \frac{\partial\phi}{\partial y} \neq 0\}$) ili sa strane oplakane površine (na kojoj vrijedi $\{\phi \neq 0; \frac{\partial\phi}{\partial n} = \vec{V} \cdot \vec{n}\}$).

Na dijagramima s lijeve strane osi $x = 0$ nalaze se funkcija konstante lokalnog rješenja na slobodnoj površini (2.89)

$$K_{sp} = \frac{\frac{\partial\phi}{\partial n}}{f_{rb}} \quad (\kappa = \gamma_L),$$

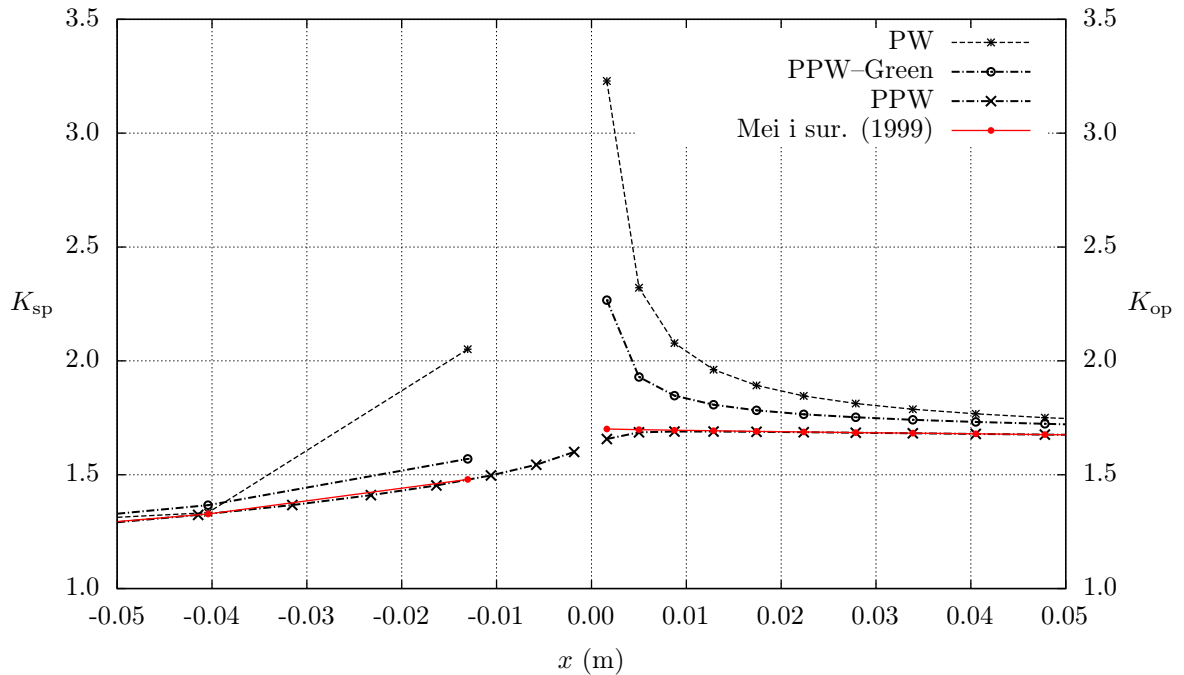
a na desnoj strani funkcija konstante lokalnog rješenja na oplakanoj površini (2.88)

$$K_{\text{op}} = \frac{\phi}{f_p} \quad (\kappa = \gamma_L).$$

Uspoređujući rezultate s analitičkim rješenjem Mei i sur. [39] vidljivo je da poboljšana poopćena Wagnerova metoda daje značajno točnije vrijednosti potencijala na oplakanoj i brzina na slobodnoj površini u odnosu na standardnu metodu. Također, pri većim kutovima nagiba ($> 10^\circ$) gledajući kvalitetu rezultata uočljiv je značajniji utjecaj desingularizacije potencijala od uvođenja Kelvinove Greenove funkcije.

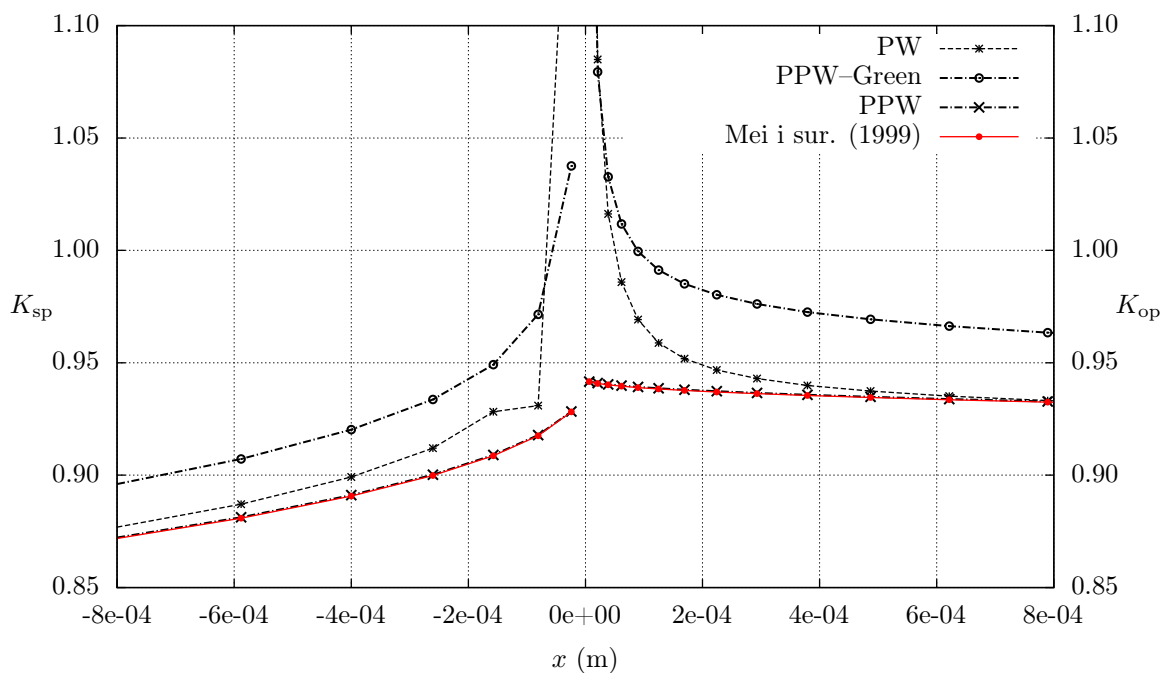
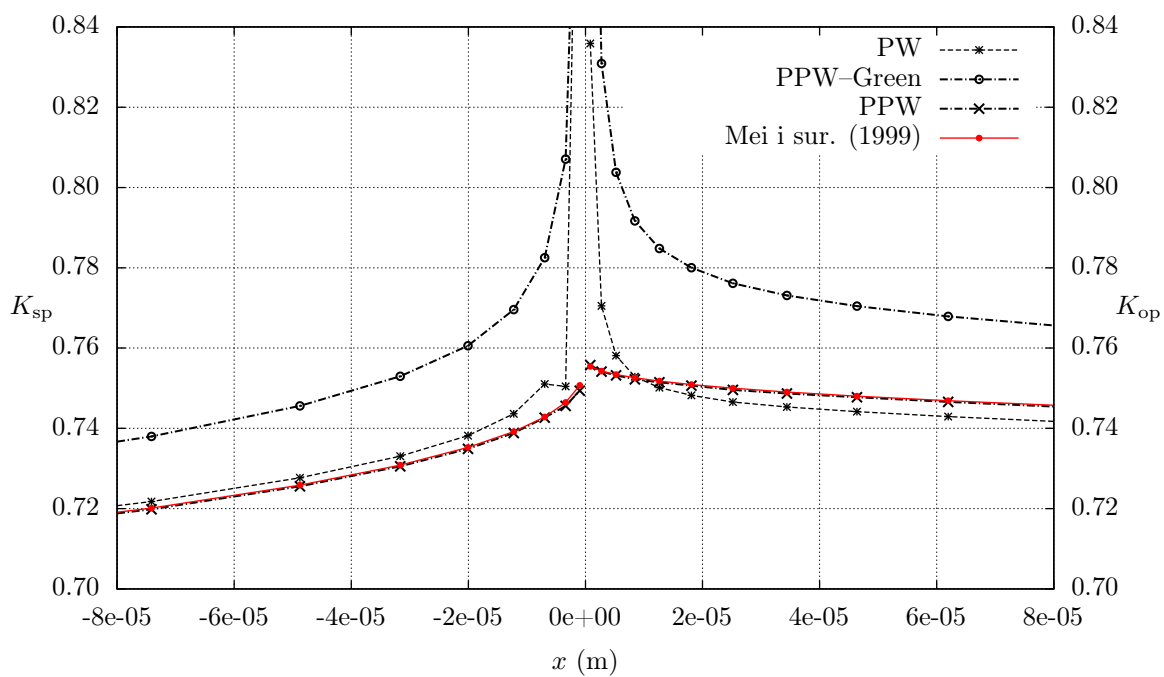
Kod klina nagiba 4° PW metoda daje najlošije rezultate, korištenje samo Kelvinove Greenove funkcije daje neznatno bolje rezultate, a pravi napredak se ostvaruje pri upotrebi potpune PPW metode čiji rezultati su vrlo bliski analitičkom modelu osim u neposrednoj blizini kontaktne točke sa strane oplakane površine gdje su odstupanja neznatno veća.

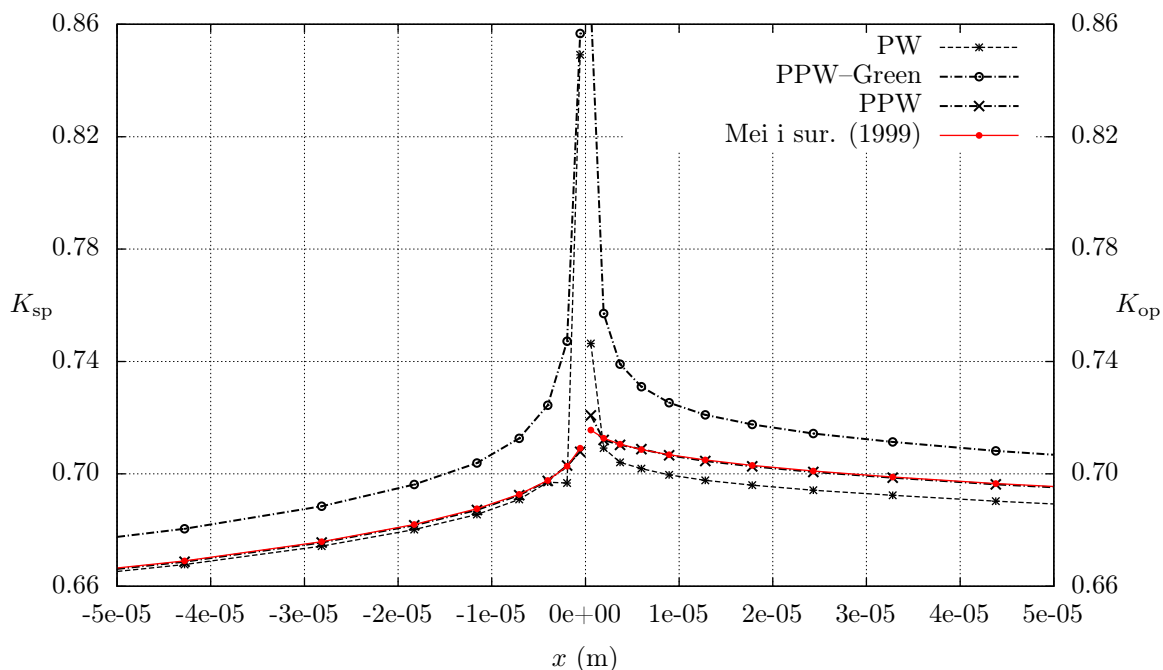
Kod klina nagiba 15° korištenje samo Greenove funkcije daje najlošije rezultate, s PW metodom dobivaju se nešto bolji rezultati, ali samo na dovoljnoj udaljenosti od kontaktne točke, dok se u blizini javljaju velika odstupanja. PPW metodom dobivaju se vrlo dobra poklapanja na čitavoj domeni.



Slika 4.12: Ponašanje funkcije konstante lokalnog rješenja – klin nagiba 4°

U preostala dva primjera također je primjetno značajnije odstupanje kada se koristi samo nova Greenova funkcija, PW metoda pokazuje manja odstupanja na većem dijelu domene, s iznimkom područja u neposrednoj blizini kontaktne točke

Slika 4.13: Ponašanje funkcije konstante lokalnog rješenja – klin nagiba 15° Slika 4.14: Ponašanje funkcije konstante lokalnog rješenja – klin nagiba 30°



Slika 4.15: Ponašanje funkcije konstante lokalnog rješenja – klin nagiba 45°

gdje se javlja vrlo veliko odstupanje. Kao i u prethodnim primjerima PPW metodom dobiva se vrlo dobro podudaranje na cjelokupnoj domeni.

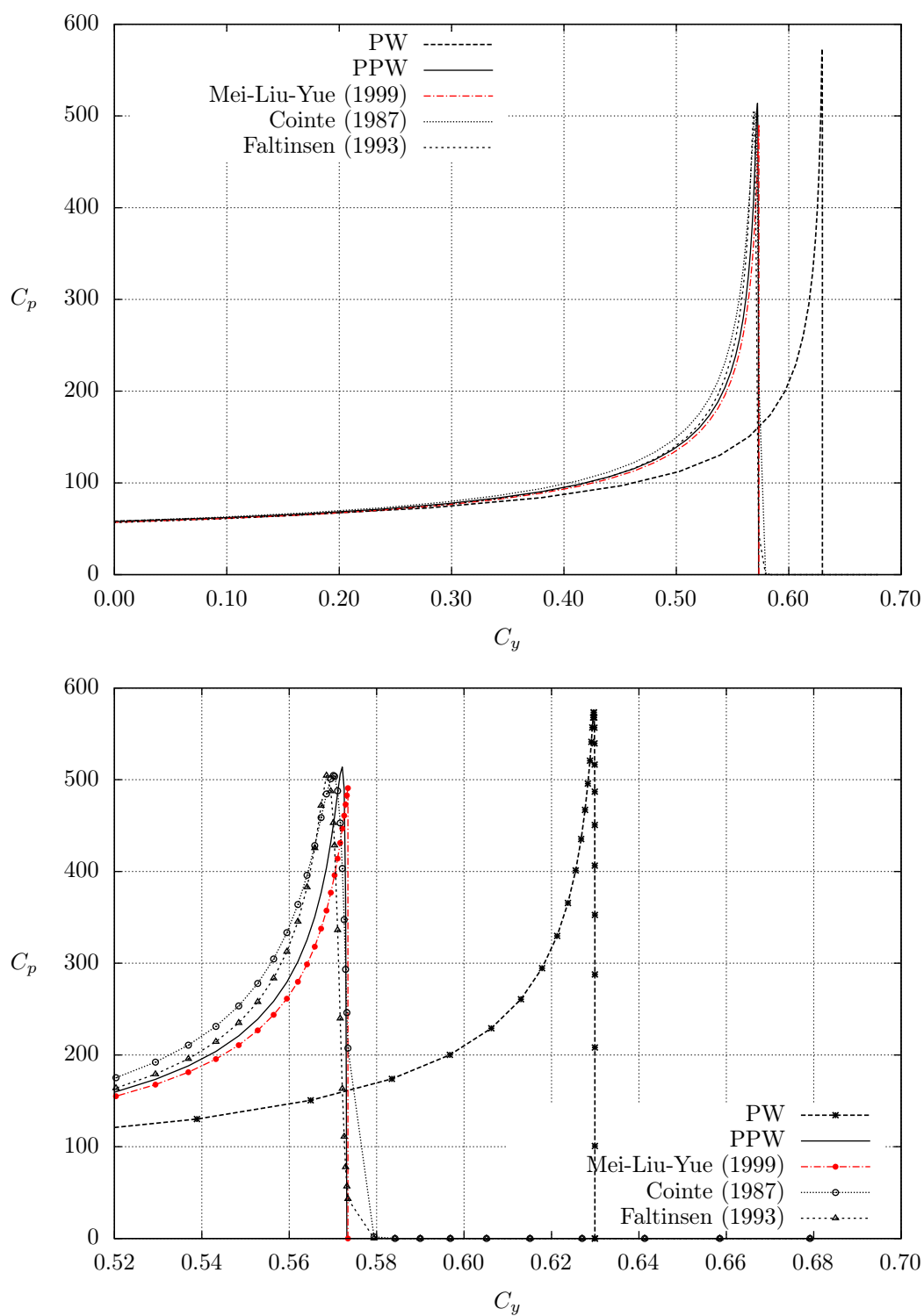
Na slikama 4.16 – 4.19 prikazane su usporedbe prostorne raspodjele tlaka na klinovima nagiba 4° , 10° , 30° i 45° , u određenom vremenskom trenutku, proračunate osnovnom i poboljšanom poopćenom Wagnerovom metodom, modelom Mei i sur. (1999) [39] te metodama asimptotskog razvoja Cointea (1987) [51] i Faltinsena (1993) [21].

Tlak p i prostorna varijabla y prikazani su pomoću odgovarajućih bezdimenzijskih veličina koje su definirane na sljedeći način:

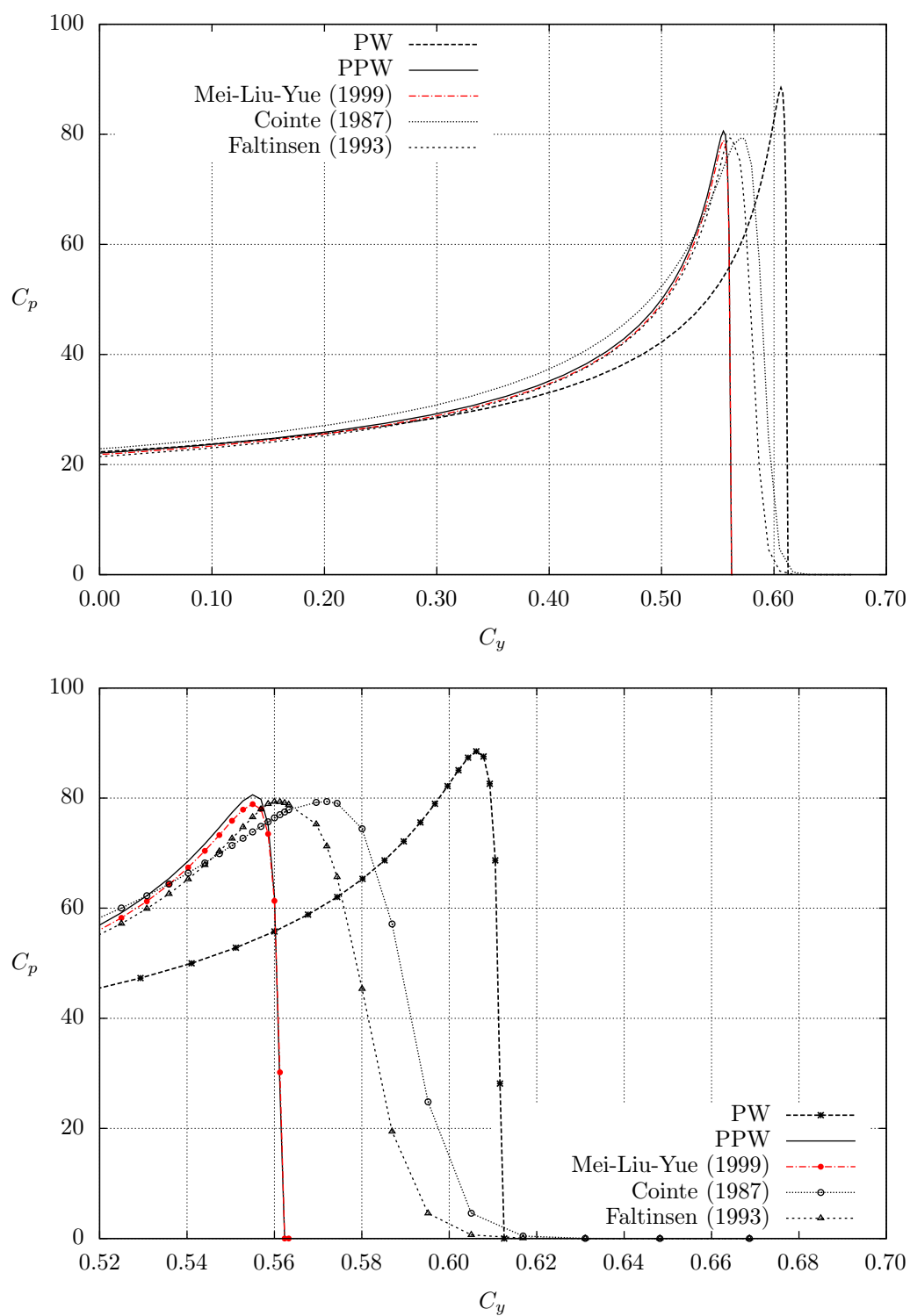
$$C_p = \frac{p}{\frac{1}{2}\rho V^2} \quad (4.76)$$

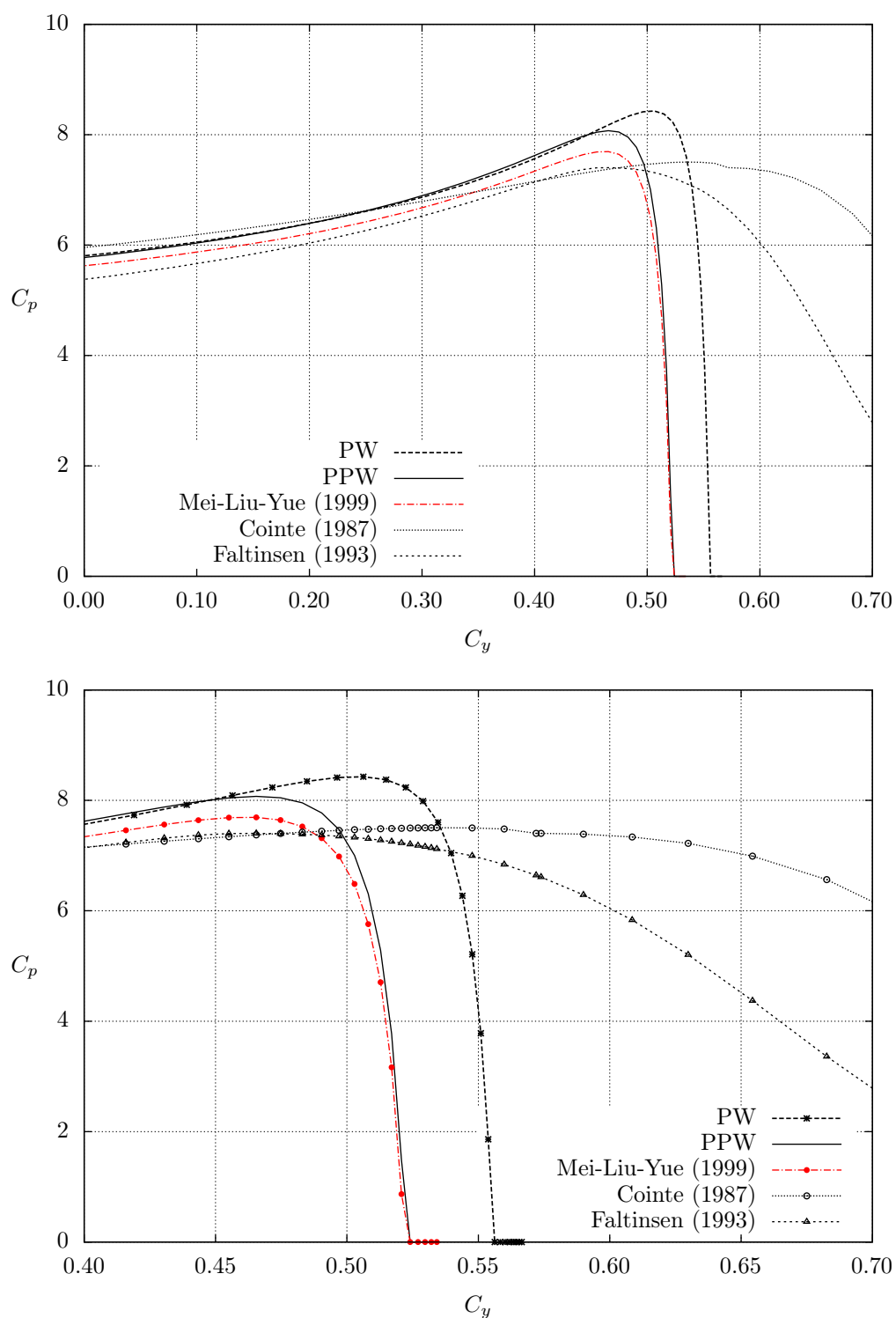
$$C_y = \frac{y}{Vt} \quad (4.77)$$

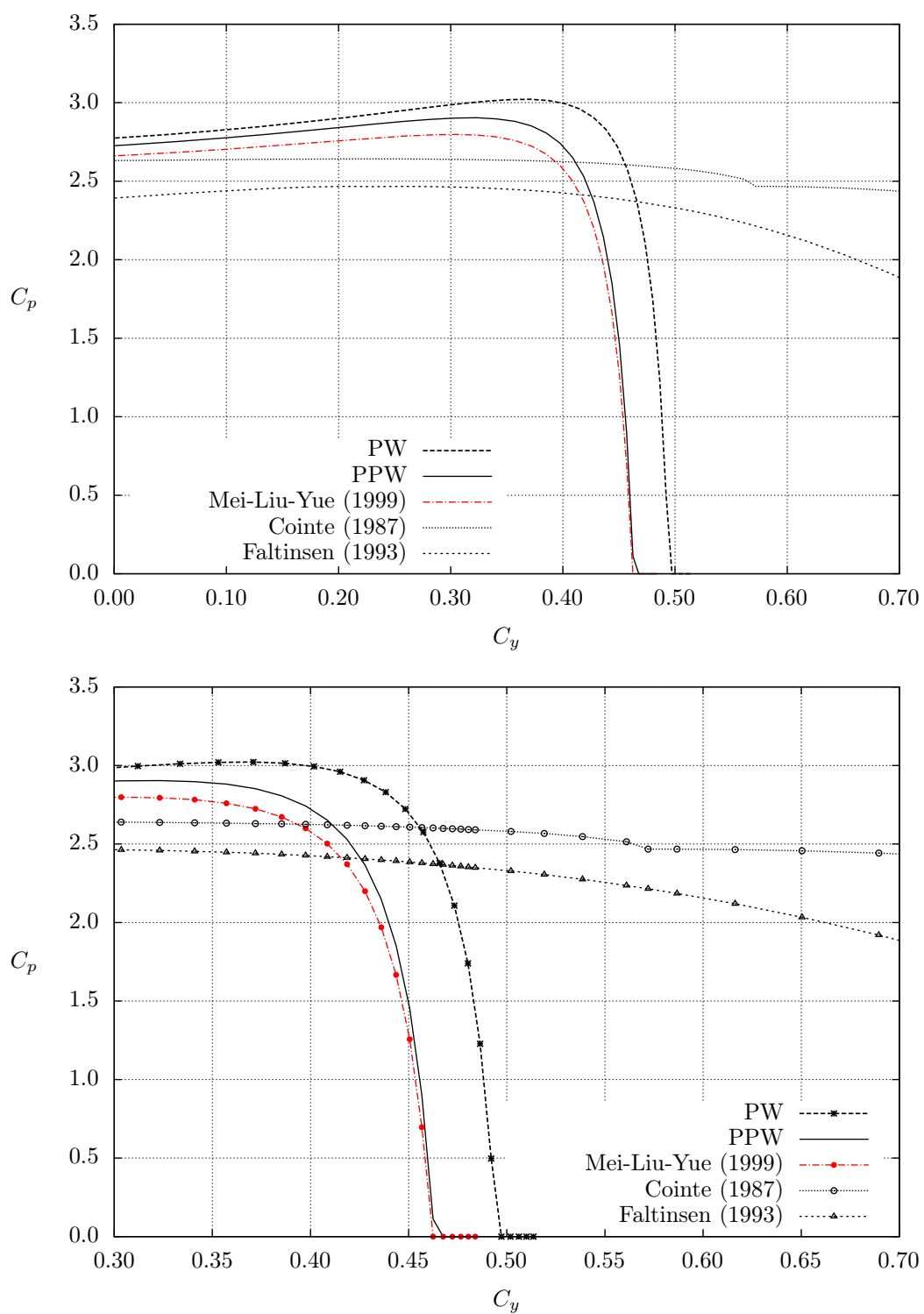
Kod manjih kuteva nagiba tlak dobiven osnovnom Wagnerovom metodom značajno odstupa u odnosu na sve ostale. Razlog tome je način računanja vremenskog koraka kojime se dobiva netočnija procjena vremena prodiranja u odnosu na poboljšanu metodu i metodu Mei i sur. (1999). Dobivena razlika tlaka smanjuje se s porastom nagiba klinastog tijela. Asimptotske metode daju vrlo dobra poklapanja kod malih kuteva nagiba, što je u skladu s pretpostavkama na kojima se zasnivaju. Tlakovi izračunati poboljšanom metodom izvrsno se poklapaju s rezultatima modela Mei i sur. (1999) osim u području vršnog dijela funkcije raspodjele gdje su vrijednosti dobivene metodom PPW neznatno više.



Slika 4.16: Usporedba prostorne raspodjele tlaka za klin nagiba 4°

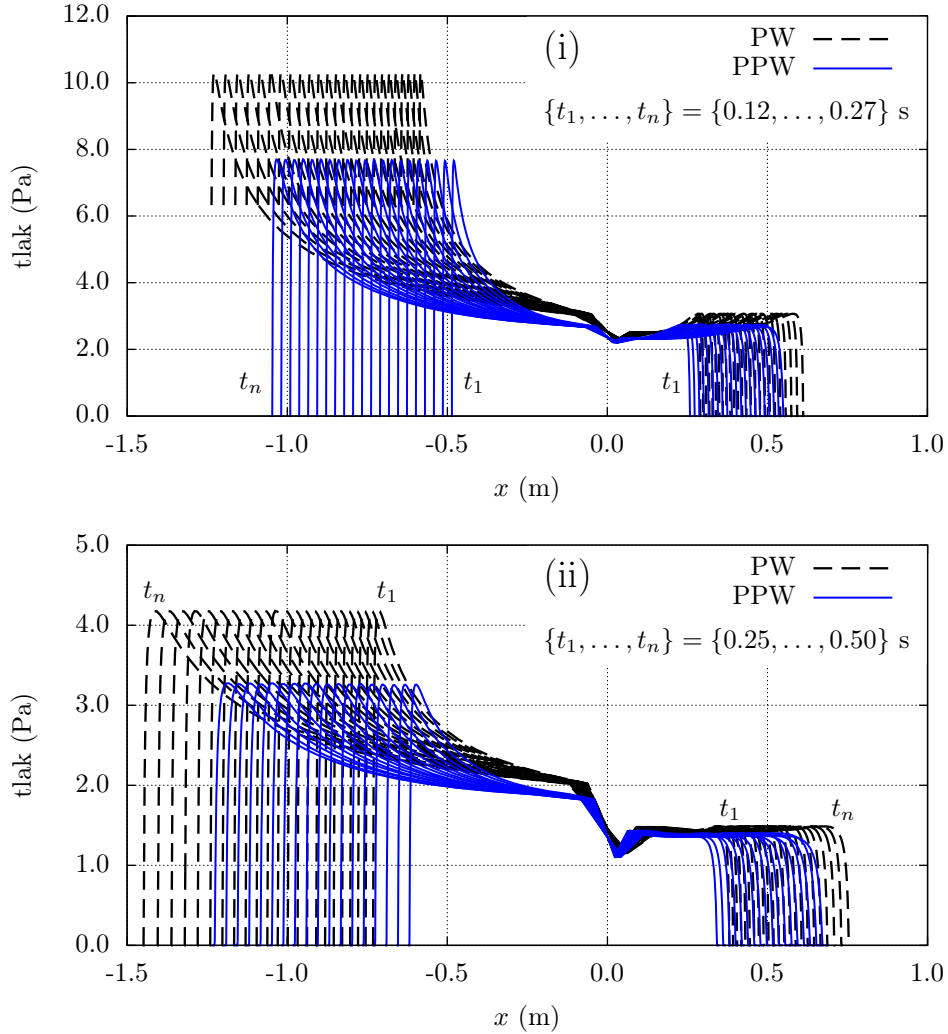
Slika 4.17: Usporedba prostorne raspodjele tlaka za klin nagiba 10°

Slika 4.18: Usporedba prostorne raspodjele tlaka za klin nagiba 30°

Slika 4.19: Usporedba prostorne raspodjele tlaka za klin nagiba 45°

4.8.2. Primjer 2 – nesimetrični klin

Verifikacija nesimetričnog prodiranja napravljena je na primjeru dva klina s početnim nagibima na obje strane od 30° odnosno 40° koji su nagnuti za 10° u pozitivnom smjeru (obrnuto od smjera kazaljke na satu). Prodiranje klina računato je za konstantnu vertikalnu brzinu $V = 1 \text{ m/s}$ uz gustoću tekućine $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$.



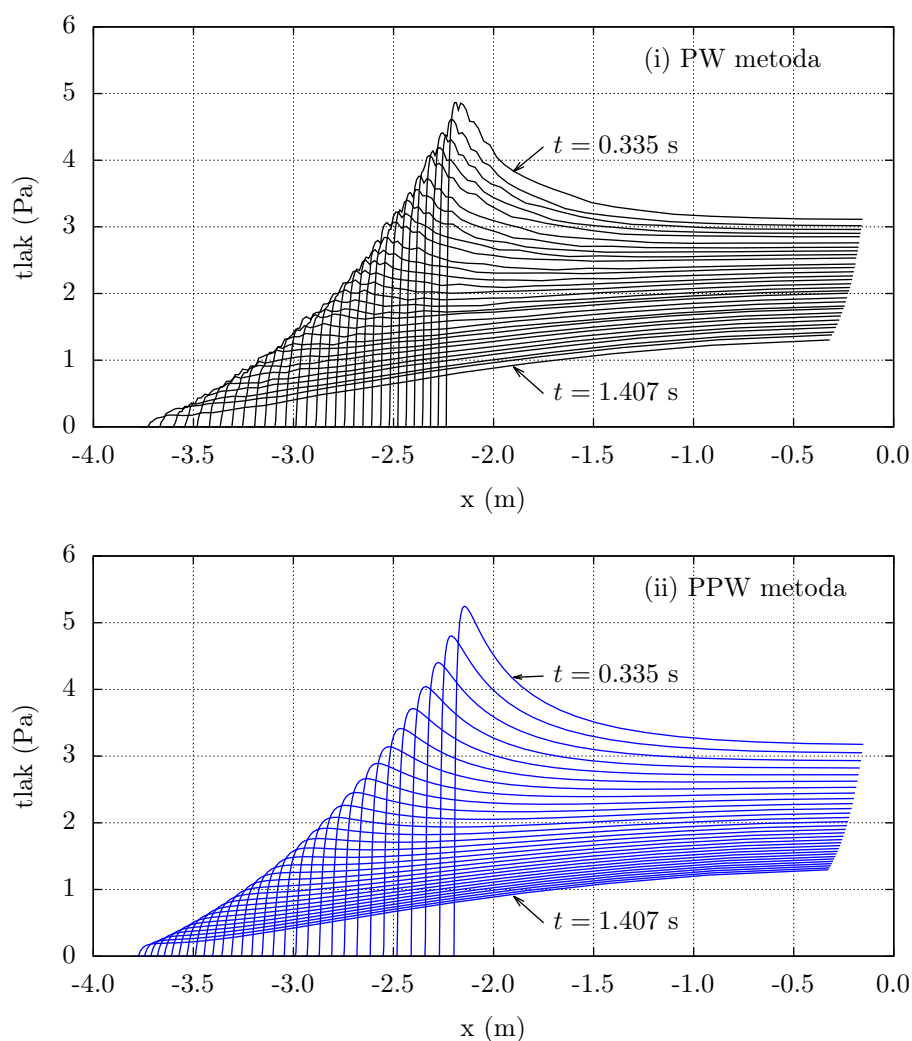
Slika 4.20: Usporedba prostorne raspodjele tlaka za nesimetrične klinove početnih nagiba na obje strane od 30° (i) odnosno 40° (ii) nagnutih za $+10^\circ$

Rezultati prikazani na slici (4.20) pokazuju da dostignuta maksimalna vrijednost tlaka na obje strane presjeka ostaje konstantna tijekom trajanja urona što je očekivano ponašanje pri konstantnoj brzini prodiranja. Vidljiva je razlika u prostornoj raspodjeli tlaka između osnovne PW i nove PPW metode što je također očekivano s obzirom na razlike u načinu proračuna vremenskog koraka. Također, vršne vrijednosti tlakova na obje strane presjeka nisu jednake kod obje metode s time da se razlika smanjuje povećanjem lokalnog nagiba poprečnog presjeka.

4.8.3. Primjer 3 – polukružni presjek

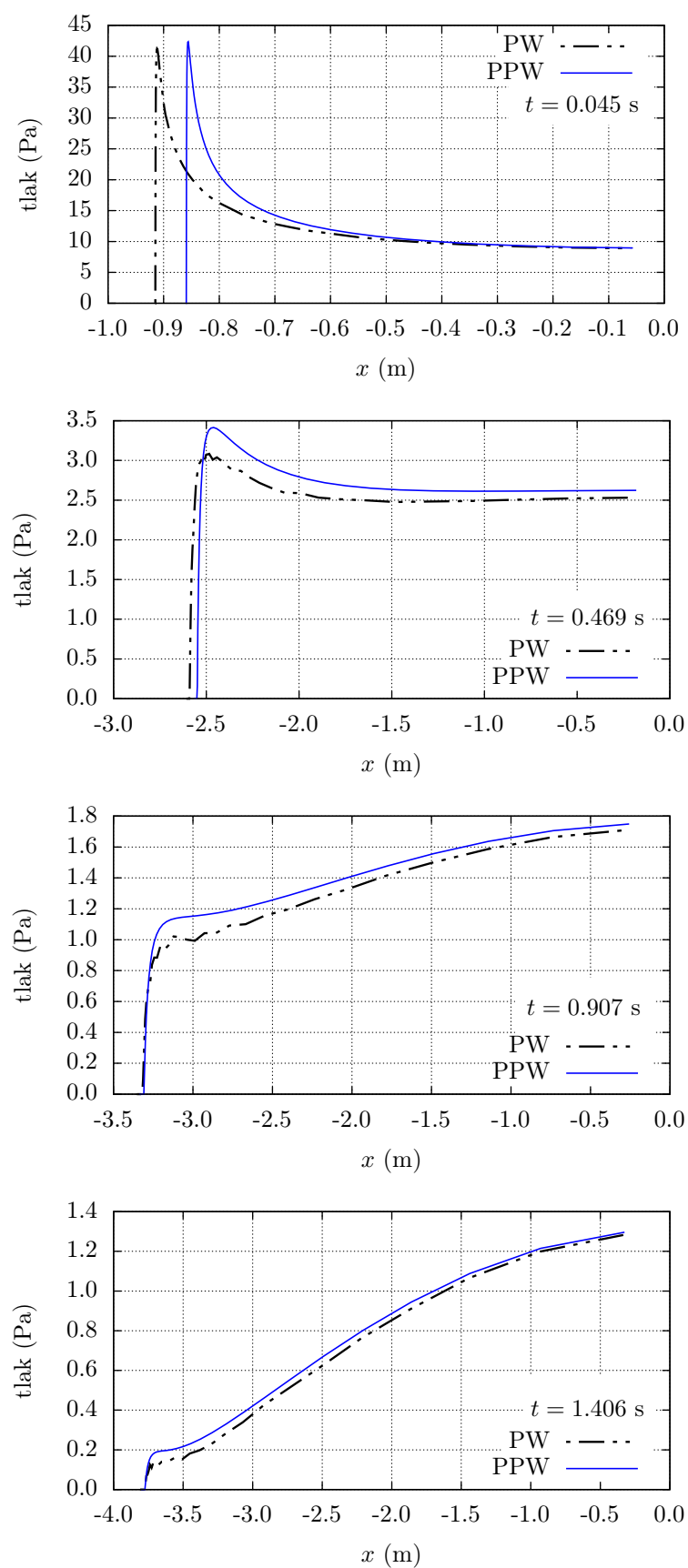
Drugi primjer uranjajućeg tijela je polukružni presjek polumjera $R = 4$ m koji uranja konstantnom brzinom $V = 4$ m/s, uz početni gaz $h_0 = 0$ m, u nestlačivu tekućinu gustoće $\rho = 1$ t/m³. Rezultati su uspoređeni s osnovnom poopćenom Wagnerovom metodom.

Može se primjetiti kako u ranoj fazi uranjanja postoji značajno nepodudaranje prostorne distribucije tlakova dok ta razlika skoro sasvim nestaje u kasnijim fazama urona (Slika 4.22).

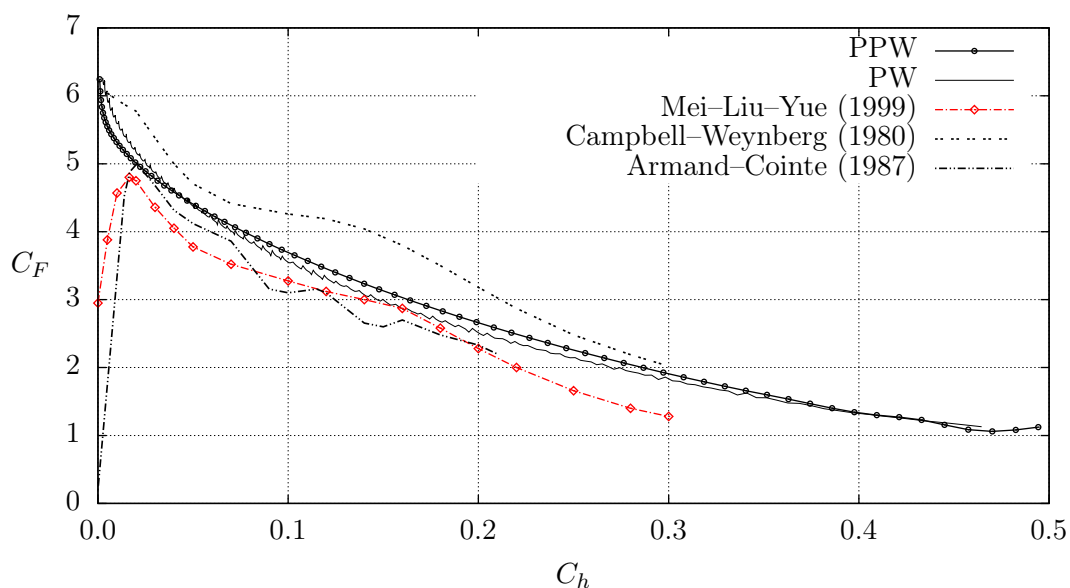


Slika 4.21: Prostorna distribucija tlaka na kružnom presjeku promjera $R = 4$ m pri konstantnoj brzini urona $V = 1$ m/s u trenucima $t \in \{0.335 \text{ s}, \dots, 1.407 \text{ s}\}$

Na slici (4.23) uspoređeni su rezultati ukupne sile na polukružni poprečni presjek izračunati PW odnosno PPW metodom s rezultatima metode Meija i sur (1999) [39] odnosno s eksperimentalnim ispitivanjima Cointea i Armanda (1987) [13] te Campbella i Weynberga (1980) [52]. Ukupna sila prikazana je bezdimenzijski na



Slika 4.22: Usporedba prostorne distribucija tlaka – kružni presjek



Slika 4.23: Ukupna sila na polukružni presjek koji uranja konstantnom brzinom – usporedba nekoliko metoda

sljedeći način:

$$C_F = \frac{F}{\rho V^2 R} \quad (4.78)$$

gdje je F sila na oplakanu površinu, ρ gustoća tekućine, V brzina udara te R polumjer polukružnog presjeka. Na apscisi je bezdimenzijski prikazan trenutni gaz tijela:

$$C_h = \frac{Vt}{R} \quad (4.79)$$

Rezultati dobiveni metodama poopćenog Wagnera (PW odnosno PPW) pokazuju vrlo dobro poklapanje. Usporedbom s metodom Meija i sur. (1999) primjećuje se značajnije odstupanje u početnim trenucima, dok je u kasnijim poklapanje zadovoljavajuće. Odstupanja u početnim koracima mogu se pripisati numeričkoj grešci u fazi stabilizacije proračuna koja je karakteristična za sve metode temeljene na diskretiziranju domene.

5. Lokalni odziv strukture uslijed udaranja o valove

Gledajući općenito, interakciju fluida i strukture pri impulsnom tipu opterećenja kao što je udaranje o valove može se promatrati u nekoliko vremenskih faza [53]. Neposredno nakon udara započinje period lokalnog utjecaja tijekom kojeg su naprezanja i deformacije lokalizirane na opločenju koje je u neposrednom doticaju s tekućinom te na susjednom uzdužnom i poprečnom orebrenju (rebra, rebrenice, jaki nosači). Slijedi period tranzicije tijekom kojeg naprezanja propagiraju u okolne elemente brodske konstrukcije koji nisu neposredno povezani s dijelom opločenja na kojem djeluje opterećenje. Na kraju slijedi period globalnog utjecaja na brodski trup koji se manifestira u povećanju momenta savijanja na glavnom rebru te u obliku vibracija cjelokupne strukture u literaturi poznate kao podrhtavanje. Prema dosadašnjim istraživanjima [54] pokazalo se da značajnija oštećenja elemenata konstrukcije uzrokuju samo djelovanja u lokalnoj i globalnoj razini, dok ona u tranzicijskoj fazi ne uzrokuju ozbiljnije probleme.

Na lokalnoj razini pločasti dijelovi brodske konstrukcije tijekom operativnog razdoblja mogu biti izloženi statičkom ili dinamičkom djelovanju okolišnih sila odnosno opterećenju koje ne ovisi ili ovisi o vremenu. Iz gledišta lokalnog odziva (s izuzetkom zamora koji je uzrokovan dinamičkim ponašanjem globalne strukture) u statička se, uz opterećenje na mirnoj vodi, ubrajaju i sva opterećenja niske frekvencije kao što je npr. djelovanje valova. U dinamička djelovanja ubrajaju se opterećenja visoke frekvencije koja nastaju kao posljedica zapljuskivanja u tankovima, udaranja o valove, podvodnih eksplozija i sličnih [55].

S obzirom na način djelovanja dinamička opterećenja lokalne strukture mogu se svrstati u jednu od sljedećih kategorija [56]:

- (1) sudari – nastaju uslijed međudjelovanja dijelova brodske konstrukcije ili opreme (primjeri: pad teškog tereta na palubu, sudar brodova)
- (2) udarna tlačna opterećenja – nastaju uslijed djelovanja tekućine na strukturu pri čemu se udarni tlak može funkcijski prikazati u ovisnosti o vremenu (eng. pressure-time history; primjeri: udaranje o valove, zapljuskivanje u tankovima)
- (3) impulsi – opterećenja tlakom visoke amplitude i vrlo kratkog trajanja uslijed širenja poremećaja kroz fluid u neposrednoj blizini izloženih strukturnih dijelova (primjer: podvodna eksplozija)

Dinamička opterećenja iz druge i treće skupine u stručnoj literaturi [1], [57] vode se pod zajedničkim nazivom impulsna tlačna opterećenja zbog sličnih fizikalnih osnova na kojima se temelje njihovi matematički modeli. Može se reći da s gledišta strukturnog odziva impuls kao što je podvodna eksplozija (kratko trajanje

opterećenja) predstavlja ekstremni slučaj udarnog tlačnog opterećenja kao što je zapljuskivanje ili udaranje o valove (nešto dulje trajanje opterećenja) [1].

Način na koji impulsna tlačna opterećenja djeluju na strukturni odziv ovisi o njihovoj amplitudi i promjeni vrijednosti u ovisnosti o vremenu i prostoru. S obzirom da oba parametra (vršna vrijednost te prostorno vremenska distribucija) u većoj ili manjoj mjeri utječu na odziv, u analizi odziva potrebno ih je sagledavati zajedno. Odabir razine interakcije, odnosno da li postoji izrazita dominacija jednog od parametara ili su zastupljena oba istovremeno, ovisi o tipu opterećenja i fizikalnim karakteristikama konstrukcije izložene opterećenju [57].

5.1. Problemi pri računanju lokalnog odziva uslijed udaranja

Prema Pravilima [58] projektni kriteriji za dimenzioniranje lokalnih elemenata konstrukcije izloženih impulsnom tlačnom opterećenju zasnivaju se na kvazistatičkom principu ekvivalencije [56]. Prema tom načelu jednaka razina odziva strukture uslijed udarnog tlaka može se postići izlaganjem iste ekvivalentnom statičkom tlaku. Vrijednost ekvivalentnog statičkog tlaka trebala bi biti takva da prouzrokuje razinu odziva usporedivu s najnepovoljnijim oblikom impulsnog tlačnog opterećenja [1].

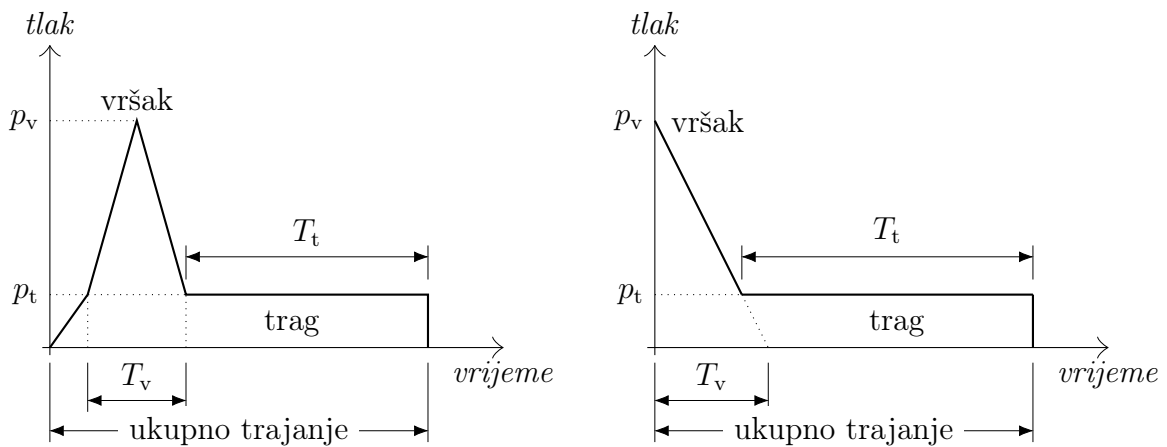
Upravo ovakvo neselektivno poimanje ekvivalentnog statičkog opterećenja koje bi trebalo simulirati impulsna tlačna opterećenja u svim mogućim situacijama može dovesti do pogrešnih procjena pri analizi strukturnog odziva na lokalnoj razini. Kvizistatički pristup podrazumijeva zanemarivanje inercijskih efekata odnosno izostavljanje sila inercije iz analize. U određenim slučajevima to može biti opravdano zbog njihovog malog utjecaja na ukupni odziv, dok u drugim, gdje im je utjecaj značajan, njihovim izostavljanjem dobiva se potpuno pogrešna slika odziva. Inercijski efekti uključuju se u matematički model preko pojma dodane mase. Računanje dodane mase čak i kod jednostavnijih modela nije jednostavno [59], dok bi kod kompliciranih modela moglo biti vrlo složeno.

Jedan od najvažnijih parametara u analizi strukturnog odziva uslijed opterećenja impulsnog tipa jest prirodni period lokalne strukture. Naime, osnovni način kojim se procjenjuje utjecaj inercijskih sila je usporedba duljine trajanja opterećenja s prvim prirodnim periodom vibriranja izloženog dijela strukture. Ako je trajanje opterećenja relativno dugačko u odnosu na prirodnu frekvenciju razmatrane strukture tada se odziv može analizirati primjenom kvazistatičkog pristupa. Pri tome se podrazumijeva odzivni oblik koji poprima struktura čiji se pomaci dobivaju izjednačavanjem rada vanjskih sila s apsorbiranom energijom deformiranja.

U slučaju da je trajanje opterećenja značajno kraće od prirodnog perioda tada je utjecaj oblika funkcije tlak–vrijeme zanemariv na ukupni odziv lokalne strukture te se opterećenje može smatrati impulsom. Upravo do takvog zaključka došli su Samuelides i sur. (2007) [55] istraživanjem utjecaja oblika impulsa na pojavu plastičnih deformacija neukrepljenih ploča. Slično istraživanje proveli su H. Lee i sur. (2004) [60] u kojem su također analizirali pojavu trajnih deformacija na neukrepljenim panelima uz variranje amplitude tlaka i vremena trajanja opterećenja. Primjetili su

približno iste razine plastičnih deformacija u slučaju da je trajanje opterećenja više nego dvostruko dulje od prirodnog perioda panela.

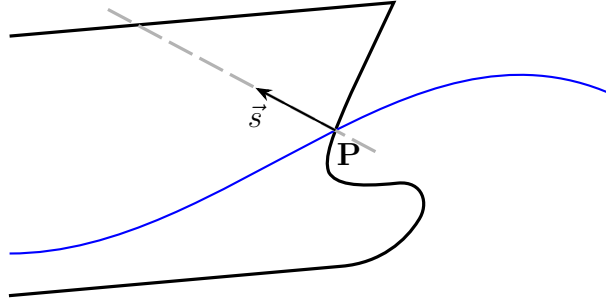
U većine dosadašnjih istraživanja opterećenje se zadavalo u obliku neke unaprijed definirane parametarske funkcije tlak–vrijeme (Slika 5.1). Pri tome nije uzimana u obzir prostorna distribucija opterećenja nego je tlak u svakom pojedinom vremenskom trenutku zadavan s istom vrijednošću u svim konačnim elementima vanjske oplata koji su bili izloženi udaru. Na dijagramu (a) prikazana je funkcija tlak–vrijeme korištena u studiji utjecaja udaranja o valove na dio pramčanog izboja pri promjeni parametara p_v , p_t , T_v i t_t (Lee i sur. (1998), [61]), a na dijagramu (b) funkcija tlak–vrijeme korištena pri određivanju projektne formule za dimenzioniranje neukrepljenih panela uslijed udaranja o valove (Cho i sur. (2002), [62]).



Slika 5.1: Oblici parametarske funkcije tlak–vrijeme: (a) Lee i sur. (1998), (b) Cho i sur. (2002). Parametri: p_v - vršni tlak (amplituda), p_t - tlak traga, T_v - duljina trajanja vršnog opterećenja, T_t duljina trajanja traga.

5.2. Definiranje uvjeta udara

Određivanje tlakova uslijed udaranja o valove koji se generiraju na vanjskoj oplati plovnog objekta podrazumijeva poznavanje uvjeta pod kojima će doći do same pojave. U općem slučaju, osnovni parametri koji su potrebni pri računanju udarnih tlakova poopćenom Wagnerovom metodom uključuju iznos i smjer vektora brzine kojom fluid nailazi na oplakanu površinu tijela. Ti podaci dobivaju se iz proračuna pomorstvenih značajki razmatranog plovnog objekta. S druge strane, kako je problem pomorstvenosti također vrlo složen za rješavanje, pogotovo uzevši u obzir da još uvijek ne postoji potpuno zadovoljavajući model s brzinom napredovanja plovila, čini se da nije jednostavno odrediti parametre pri kojima dolazi do udara o valove. Međutim, korištenjem jednostavnijih modela proračuna pomorstvenih značajki kao što je npr. linearni pristup dobivaju se dovoljno dobri rezultati. Linearni model naročito je pogodan kada na tijelo nailaze vrlo dugački valovi kao što je prikazano na Slici (5.2).



Slika 5.2: Određivanje parametara udara

Vektor relativne brzine neke točke na tijelu predstavlja razliku između vektora brzine tijela i vektora brzine fluida:

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_{\text{tijelo}} - \vec{v}_{\text{fluid}} \quad (5.1)$$

S obzirom da je poopćena Wagnerova metoda dvodimenzionalnog karaktera primjenjuje se vrpčasti pristup kojim se u obzir uzimaju trodimenzionalni efekti. Primjenjeno na konkretni primjer to znači podjelu razmatranog dijela vanjske oplata na niz 2D presjeka i rješavanje hidrodinamičkog dijela proračuna za svaki od njih posebno. Ako je ravnina pojedine vrpce definirana s jediničnim vektorom \vec{s} tada se vektor relativne brzine u nekoj točki koja pripada vrpci treba projicirati u smjeru tog jediničnog vektora:

$$v_{\text{rel}} = (\vec{v}_{\text{tijelo}} - \vec{v}_{\text{fluid}}) \cdot \vec{s} \quad (5.2)$$

Također, potrebno je poznavati i relativno gibanje točke P kako bi se odredio trenutak u kojem se javlja udaranje. Relativni položaj točke P u odnosu na slobodnu površinu definira se relacijom:

$$(Z_P)_{\text{rel}} = Z_{P0} + \Delta Z_P - \mathcal{Y}_w, \quad (5.3)$$

gdje je Z_{P0} početni položaj razmatrane točke P u odnosu na položaj mirne slobodne površine ($\mathcal{Y} = 0$), ΔZ_P vertikalni pomak točke P, a \mathcal{Y}_w slobodna površina vala. Udar se događa kada vrijednost veličine $(Z_P)_{\text{rel}}$ promijeni predznak iz pozitivnog u negativni.

5.3. Matematički model lokalnog odziva strukture

Pojednostavljeni matematički model lokalnog odziva strukture uslijed udara o valove [54] izvodi se uz pretpostavku elastičnog tijela na kojeg djeluje vanjsko dinamičko opterećenje. Za lokalnu strukturu izloženu udaru uzima se ili samo ploča vanjske oplata između tercijarnih nosača ili ortotropna ploča koju čine oplata sa svim orebrenjem uključujući jake nosače i ukrepe.

U slučaju da se promatra samo opločenje između ukrepa ono se može u matematičkom opisu pojednostaviti pomoću homogene Eulerove grede. Radi praktičnosti u daljnjem prikazu koristit će se ovaj jednostavniji model. S obzirom da oba opisana strukturna dijela (ploča između ukrepa i ortotropna ploča) sudjeluju u lokalnom

odzivu tijekom ili neposredno nakon udara upotrebom bilo kojeg od njih dolazi se do istih zaključaka.

Jednadžba gibanja homogene Eulerove grede slijedi iz Euler-Lagrangeove diferencijalne jednadžbe:

$$m_g \ddot{w} + C_{\text{loc}} \dot{w} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = F_{\text{uk}} \quad (5.4)$$

gdje je w progib, m_g masa grede po jedinici duljine, C_{loc} strukturno prigušenje, E modul elastičnosti, J moment inercije poprečnog presjeka grede, a F_{uk} ukupno opterećenje uslijed udara fluida. Newtonove oznake derivacija po vremenu (\ddot{w} i \dot{w}) uvedene su kako bi ih se vizualno istaknulo u odnosu na derivaciju po prostornoj varijabli u trećem članu.

Ukupno opterećenje uslijed udara može se podijeliti na opterećenje krutog tijela koje se generira ako se tijelo promatra kao potpuno kruto F_{kt} i na opterećenje međudjelovanja uslijed interakcije između elastičnog tijela i fluida f_{int} :

$$F_{\text{uk}} = F_{\text{kt}} + F_{\text{int}} \quad (5.5)$$

S obzirom da se fluid smatra nestlačivim F_{int} se dijeli na opterećenje uslijed inercijskih, prigušnih i povratnih sila:

$$F_{\text{int}} = F_{\text{int}_I} + F_{\text{int}_P} + F_{\text{int}_K} \quad (5.6)$$

$$\text{ili } F_{\text{int}} = -\left(m_{zz} \ddot{w} + c_{zz} \dot{w} + k_{zz} w\right)$$

Negativni predznak u izrazu (5.6) znači da opterećenje međudjelovanja uvijek djeluje u suprotnom smjeru od gibanja udarenog tijela.

Dio vezan za inercijske sile dobiva se iz Newtonovog drugog zakona (sila jednaka umnošku mase i akceleracije). m_{zz} u (5.6) predstavlja dodanu masu fluida koji okružuje tijelo. Hidrodinamičko prigušenje c_{zz} nastaje kao posljedica relativnog gibanja između tijela i okolnog fluida. Povezano je s gubitkom energije u graničnom sloju te s gubicima uzrokovanih viskoznom trenjem i stvaranjem površinskih valova. Smatra se da ima zanemariv utjecaj na početnu amplitudu vibriranja elastičnog tijela tijekom prve faze udara pa se u većini slučajeva izostavlja. Dio koji se odnosi na povratnu silu k_{zz} vezan je uz silu uzgona, a s obzirom da se zanemaruje utjecaj gravitacijske sile u hidrodinamičkom modelu [9], [3] može se izostaviti iz analize.

Uzimanjem ovih pretpostavki u obzir te uvrštavanjem izraza (5.6) i (5.5) jednadžba (5.4) prelazi u:

$$(m_g + m_{zz}) \ddot{w} + C_{\text{loc}} \dot{w} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = F_{\text{kt}} \quad (5.7)$$

Glavna poteškoća u rješavanju gornje jednadžbe je određivanje razine strukturnog prigušenja čiju vrijednost je vrlo teško točno procijeniti.

U sklopu eksperimentalnih istraživanja koje je proveo Chuang [63, 64] namjeravalo se utvrditi u kojoj mjeri pojedini faktori sudjeluju u strukturnom odzivu pri udarnom opterećenju. U tu svrhu napravljeno je nekoliko modela lokalne brodske konstrukcije koji su izlagani tlačnom opterećenju pri slobodnom padu. Modeli su

geometrijski i strukturno skalirani na dimenzije pogodne za eksperimentalno ispitivanje pri čemu se vodilo računa da vjerno prikažu lokalnu strukturu. Rezultati istraživanja pokazali su sljedeće:

- (a) tekućina koja udara na tijelo može se smatrati nestlačivom;
- (b) prigušenje nema većeg utjecaja na konačan odziv te se može izostaviti;
- (c) u slučaju dovoljno krute konstrukcije inercijske sile također se mogu zanemariti te se odziv može analizirati kvazi-statičkim modelom.

Zanemarivanjem utjecaja strukturnog prigušenja jednadžba (5.7) prelazi u:

$$(m_g + m_{zz}) \ddot{w} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = F_{kt} \quad (5.8)$$

Jednadžba (5.8) predstavlja osnovu za sve hidroelastične modele koji opisuju interakciju fluid–struktura pri impulsnom tlačnom opterećenju.

5.4. Analiza dinamičkog modela

U slučaju da na Eulerovu gredu djeluje periodičko opterećenje oblika $F_{kt}(x, t) = q \sin(\omega t)$ tada se progib $w(x, t) = w \sin(\omega t)$ nakon uvrštavanja u (5.8) može izraziti sljedećom jednadžbom [65]:

$$-\omega^2 m_{uk} w + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q \quad x \in \langle 0, L \rangle \quad (5.9)$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad x = 0, x = L \quad (5.10)$$

gdje je $m_{uk} = m_g + m_{zz}$ ukupna masa, L duljina grede, a w i q funkcije progiba grede i opterećenja ovisne o prostornoj varijabli x .

Za slobodno oslonjenu gredu korištenjem metode prirodnih modova progib i opterećenje mogu se izraziti sljedećim funkcijama:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (5.11)$$

Koeficijent a_n definiran je na sljedeći način:

$$a_n = a_{nst} \left(1 + \frac{\omega^2}{n^4 f_1^2 - \omega^2} \right) = a_{nst} (1 + \mu_n) \quad (5.12)$$

gdje je n broj moda, f_1 prirodna frekvencija prvog moda, ω frekvencija uzbude, a a_{nst} koeficijent statičkog progiba koji se dobiva rješavanjem diferencijalne jednadžbe (5.8) nakon izostavljanja člana s drugom derivacijom po vremenu (\ddot{w}):

$$a_{nst} = \frac{q_n}{m_{uk} f_1^2 n^4}, \quad f_1 = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{m_{uk}}} \quad (5.13)$$

Drugi član u zagradi izraza (5.12) predstavlja dinamički koeficijent n -tog moda (označava se μ_n) kojime se opisuje razina utjecaja dinamičkih efekata na ukupni odziv strukture pri periodičkom opterećenju:

$$\mu_n = \frac{\omega^2}{n^4 f_1^2 - \omega^2} \quad (5.14)$$

Analizom izraza (5.14) vidljivo je da vrijedi nejednakost

$$\frac{\omega^2}{n^4 f_1^2 - \omega^2} \leq \frac{1}{n^4} \frac{\omega^2}{f_1^2 - \omega^2}$$

iz čega proizlazi

$$\mu_n \leq \mu_1$$

Može se zaključiti kako je za procjenu statičnosti opterećenja u sustavima s beskonačno mnogo stupnjeva slobode gibanja ključno poznavanje vrijednosti dinamičkog koeficijenta prvog moda. U slučaju da su vrijednosti dinamičkog koeficijenta dovoljno male (odnosno $\mu_1 \ll 1$) utjecaj dinamičkih efekata može se zanemariti te se struktura smatra statički opterećenom. Umjesto preko frekvencije dinamički koeficijent također je moguće definirati pomoću perioda uzbude i prirodnog perioda opterećene strukture. Pri tome se najčešće period uzbude zamjenjuje vremenom trajanja opterećenja. Odnos trajanja opterećenja i prirodnog perioda strukture pokazuje u kojoj mjeri su relevantni dinamički efekti.

Kritičnu vrijednost dinamičkog koeficijenta kod pojave udaranja o valove teško je definirati jednoznačno s obzirom da način djelovanja opterećenja nije nužno periodičan. Odgovor na to pitanje pokušao je dati Faltinsen [66] u radu u kojem je između ostalog istražio utjecaj efekta hidroelastičnosti prilikom udaranja ukrepljenog panela o valove.

Ukrepljeni panel modeliran je kao ravna hidroelastična ortotropna ploča na tijelu s klinastim poprečnim presjekom. Istraživanje je provedeno s većim brojem primjera u kojima su mijenjane brzine udara V i kutovi nagiba opločenja u odnosu na ravninu osnove β . Kao mjerna varijabla izlaznih rezultata uzeta je uzdužna deformacija u ukrepama izražena sljedećim bezdimenzijskim parametrom

$$\tilde{E}_\beta = \frac{\epsilon_m}{z_a V^2} \frac{EJ}{\rho L^2} \operatorname{tg} \beta \quad (5.15)$$

gdje je ϵ_m maksimalna vrijednost deformacije, z_a udaljenost od neutralne linije, L duljina ukrepe, a $J = D/E$ moment inercije pri čemu je D savojna krutost ploče u smjeru koordinate paralelne s uzdužnom osi ukrepe.

Prema Faltinsenoj hidroelastičnoj teoriji grede (1997) [67] prirodni period vibriranja grede koja se nalazi u neograničenom fluidu približno je proporcionalan sljedećem izrazu:

$$T_p \propto \sqrt{\frac{\rho L^5}{EJ}} \quad (5.16)$$

gdje je L duljina grede, J moment inercije poprečnog presjeka, a ρ gustoća fluida.

Vrijeme oplakivanja odnosno opterećenja pri prodiranju tijela klinastog poprečnog presjeka konstantnom brzinom V (Slika 2.5) proporcionalno je:

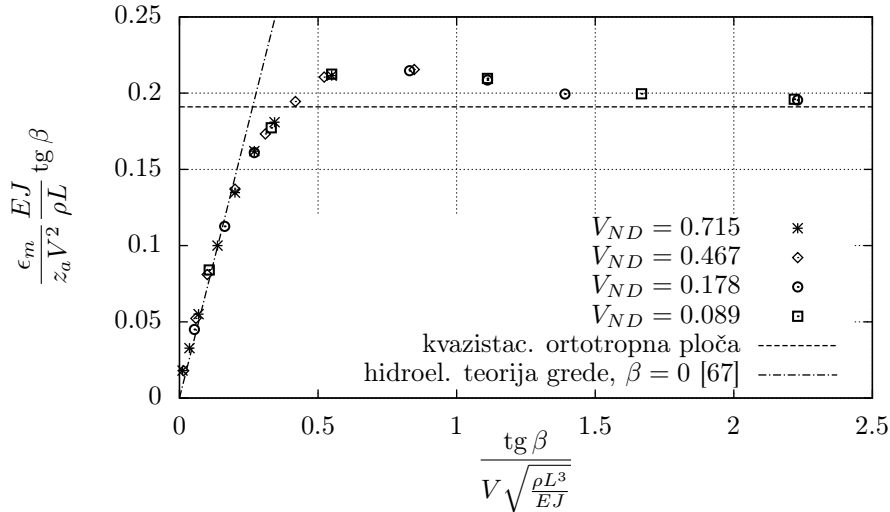
$$T_{\text{opkl}} \propto \frac{L}{V} \operatorname{tg} \beta \quad (5.17)$$

Dijeljenjem vremena oplakivanja tijela s prirodnim periodom vibriranja grede dobiva se parametar pomoću kojeg je moguće procijeniti razinu dinamičke uzbude [66]:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\tilde{V}} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{V \sqrt{\frac{\rho L^3}{EJ}}} \quad (5.18)$$

gdje \tilde{V} predstavlja bezdimenzijsku brzinu prodiranja tijela.

Na dijagramu (Slika 5.3, [66]) prikazana je ovisnost bezdimenzijske deformacije u ukrepama \tilde{E}_β u ovisnosti o bezdimenzijskom parametru definiranom u izrazu (5.18).



Slika 5.3: Graf funkcije deformacije u ovisnosti o FPU

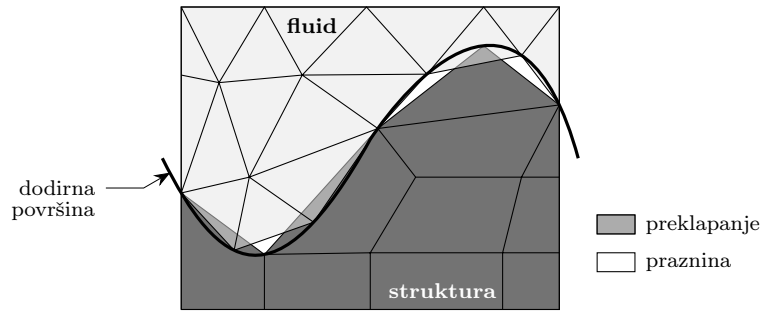
Parametar $\frac{\operatorname{tg} \beta}{V}$ naziva se Faltinsenov parametar udaranja (FPU) [68] s kojim se povezuje vrijeme oplakivanja odnosno trajanje opterećenja krutog klina s prirodnim periodom opterećene strukture.

Iz Slike 5.3 može se zaključiti da za vrijednosti $\text{FPU} < 0.25$ tijelo pokazuje hidroelastično ponašanje te su naprezanja u strukturi proporcionalna brzini udara, za vrijednosti $0.25 < \text{FPU} < 1.5$ nastupa prijelazna faza odziva, a za $\text{FPU} > 1.5$ odziv se može smatrati kvazistatičkim [68].

5.5. Preslikavanje tlakova na strukturnu mrežu

U razdijeljenom pristupu [5] pri rješavanju sprege hidrodinamičkog i strukturnog modela osnovni zadatak je pronaći način kako prebaciti opterećenja (tlakove ili sile) s hidrodinamičke na strukturnu mrežu. S obzirom na različite fizikalne aspekte hidrodinamička i strukturna domena diskretiziraju se različito u smislu rasporeda

i gustoće čvorova. Razlike posebno dolaze do izražaja na dodirnoj površini kod 3D problema odnosno na krivulji kod 2D problema, gdje se te mreže uglavnom neće idealno poklopiti. Povrh toga, kako se diskretizacija obično radi s elementima sastavljenim od ravnih rubova, na dodirnoj površini odnosno krivulji može doći do pojave praznina i preklapanja elemenata što dodatno otežava postupak (Slika 5.4).



Slika 5.4: Skica nepoklapajućih dvodimenzionalnih domena

Prijenos informacija između domena pogotovo je prisutan u problemima interakcije fluida i strukture (eng. Fluid Structure Interaction – FSI) koji se najčešće javljaju u zrakoplovstvu ili biomehanici. Primjeri koji se tamo javljaju imaju izrazitu elastičnost u čijem strukturnom odzivu se javljaju vrlo veliki relativni pomaci (odziv krila zrakoplova, strujanje krvi kroz žile, itd.). Metode kojima se ostvaruje komunikacija između domena u literaturi su poznate pod imenom metode sprežanja (eng. coupling methods) i sve se temelje na principu očuvanja energije kroz dodirnu površinu ili krivulju.

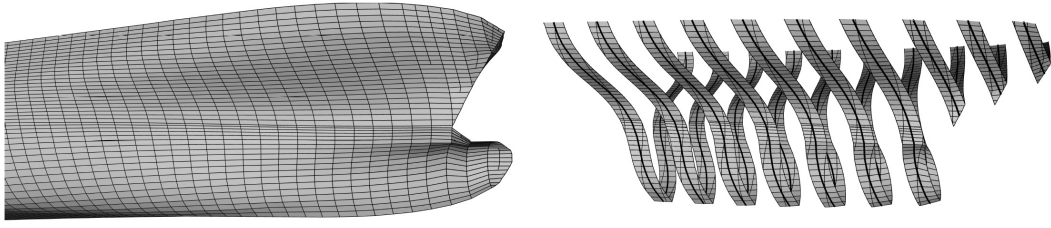
Ako se vektorom $\delta \vec{u}_s$ označe virtualni pomaci u točkama dodirne plohe na strukturnoj strani diskretiziranog modela, a vektorom $\delta \vec{u}_f$ na strani fluida tada se kinematički rubni uvjet prikazuje izrazom

$$\delta \vec{u}_f = H \delta \vec{u}_s$$

gdje H predstavlja matricu transformacije čiji oblik ovisi o odabranoj metodi sprežanja.

Prema načinu računanja matrice transformacije H metode sprežanja dijele se na:

- interpolacija najbližem susjedu – najjednostavnija, zasniva se na pronalaženju najbliže točke na domeni B traženoj točki na domeni A . Uzima se da vrijednost varijable u pronađenoj točki na domeni B ima jednaku vrijednost kao i u traženoj točki na domeni A .
- metoda težinskog ostatka – zasniva se na kompatibilnosti pomaka na dodirnoj površini ili krivulji. Obje strane jednadžbe kompatibilnosti množe se s određenim težinskim funkcijama te integriraju po dodirnoj površini ili krivulji. Pomaci na obje strane aproksimiraju se pomoću funkcija oblika jedne odnosno druge domene, a za težinske funkcije biraju se funkcije oblika ili jedne ili druge domene. U interakciji fluid–struktura najčešći izbor težina su funkcije oblika sa strane fluida jer su pomaci sa strukturne strane obično poznati.



Slika 5.5: Primjer poprečnih presjeka trupa pri proračunu udaranja o valove

- interpolacija radijalnim baznim funkcijama – zasniva se na upotrebi splajn funkcija. Pomaci na dodiru površine ili krivulje na obje domene aproksimiraju se sumom baznih funkcija:

$$u_i(x) = \sum_{j=1}^{n_s} \gamma_j \phi(\|x - x_{s_j}\|) + p(x) \quad i = \{f, s\}$$

gdje su x_{s_j} točke u kojima su vrijednosti poznate (najčešće čvorovi na strukturnom dijelu dodirne površine), p polinom, ϕ zadana bazna funkcija, $\|\cdot\|$ Euklidska norma, γ_j koeficijenti

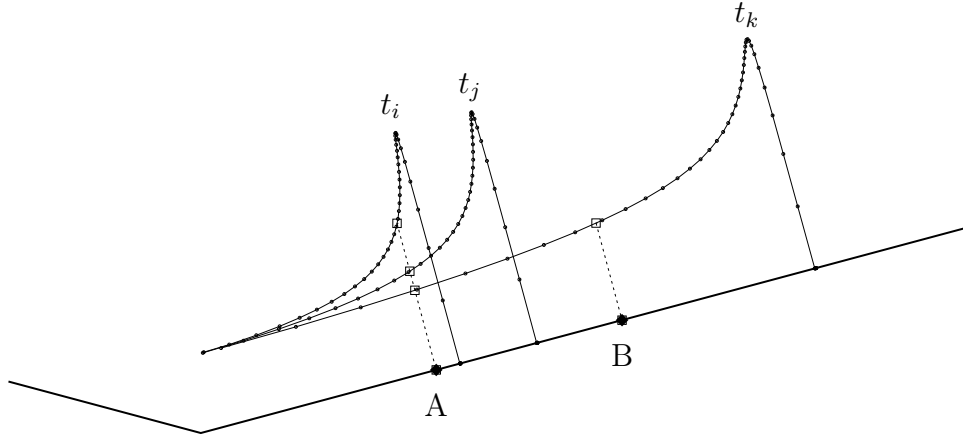
U analizi odziva uslijed udaranja o valove struktura lokalnih dijelova izloženih opterećenju u većini slučajeva smatra se krutom s relativno malim pomacima koji nemaju utjecaja na opterećenje. U skladu s time način ostvarivanja komunikacije među domenama razlikovat će se od ranije opisanih postupaka. Osim toga udaranja o valove karakterizira promjena dodirne površine tijekom vremena djelovanja opterećenja čime prijenos informacije može postati složeniji.

Određivanje opterećenja na trodimenzionalni strukturni model zasniva se na vrpčastom pristupu u kojem se ciljani dio konstrukcije odabranim ravninama dijeli na niz poprečnih presjeka (Slika 5.5, [69]). Za svaki presjek rješava se dvodimenzionalni problem prodiranja tijela kroz tekućinu poopćenom Wagnerovom metodom (Poglavlje-4.).

Parametri prodiranja svakog pojedinog presjeka dobivaju se iz proračuna pomorstvenih karakteristika broda (Poglavlje-5.2.). S obzirom da se svaki presjek rješava zasebno duljina pojedinih vremenskih koraka razlikuje se od presjeka do presjeka. Dobivanje podataka za točno određeni trenutak zahtjeva interpolaciju vrijednosti opterećenja u vremenu.

S druge strane, u svim vremenskim koracima oplakana površina hidrodinamičkog modela diskretizira se jednakim brojem rubnih elemenata koji se zbog većih gradijenata tlaka gušće postavljaju u okolini kontaktnih točaka. Kako se položaj oplakane površine mijenja s vremenom tako se mijenjaju i položaji elemenata. Dobivanje opterećenja u točno određenim točkama zahtjevalo bi interpolaciju podataka po prostornim varijablama.

Složeni model preslikavanja koji uključuje prostornu i vremensku interpolaciju traženih vrijednosti može se izbjeći ako se unutar hidrodinamičkog dijela proračuna vrijednosti opterećenja preračunavaju na točno određenim pozicijama. Položaji tih točaka određuju se unaprijed te ostaju konstantni tijekom čitavog proračuna.



Slika 5.6: Shematski prikaz prostorne raspodjele opterećenja pri prodiranju klinastog tijela u trenucima t_i , t_j i t_k

Nakon završetka proračuna za svaku nepomičnu točku određuje se povijest opterećenja (odnosno funkcija opterećenje – vrijeme) aproksimacijom preračunatih vrijednosti pomoću B-splajna. Raspodjela opterećenja u nekom trenutku t dobiva se računanjem njegovih vrijednosti iz funkcije povijesti tlaka za svaku nepomičnu točku. Time je izbjegnuta prostorna interpolacija čime se postupak preslikavanja pojednostavnio.

Na strukturnoj domeni opterećenje se prenosi na konačne elemente u obliku lateralnog tlaka koji, u slučaju pločastih elemenata, djeluje paralelno sa smjerom vektora normale. Na pojedinom elementu tlak se raspodjeljuje s konstantnom vrijednošću koja se dobiva interpolacijom iz hidrodinamičke domene.

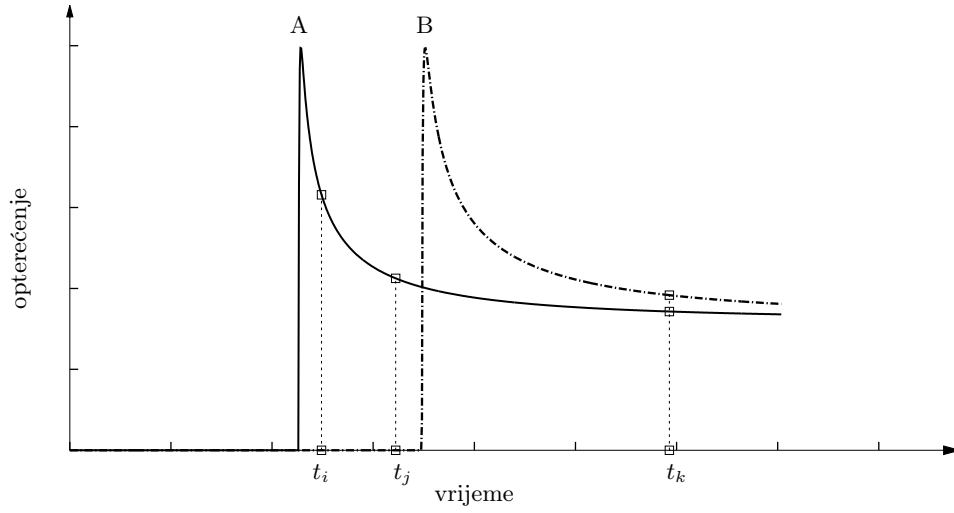
Kako bi se zadovoljio princip očuvanja energije kroz dodirnu plohu između strukture i fluida na svakom elementu računa se ukupna sila integracijom raspodjele tlaka iz hidrodinamičkog dijela proračuna. Integriranje se vrši korištenjem neke od numeričkih metoda, a najlogičniji izbor je odabir Gauss–Legendreove integracijske formule jer se ista razina točnosti postiže s minimalnim brojem točaka.

Računanje konstantnog tlaka po konačnom elementu provodi se u sljedećim koracima:

1. odabir broja integracijskih (Gaussovih) točaka po elementu. Ako je $N_{1D} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ broj Gaussovih točaka kod 1D integracije, tada je ukupni broj točaka po elementu:

$$N_I = N_{1D}^2$$

2. računanje položaja integracijskih (Gaussovih) točaka. Položaji integracijskih točaka tablično su dani u [70] u prirodnim koordinatama osnovne domene (ξ, η) ; $\xi \in [-1, 1]$, $\eta \in [-1, 1]$. Pomoću funkcija oblika bilineranog četverokutnog konačnog elementa (Dodatak A) određuju se njihove koordinate u



Slika 5.7: Shematski prikaz povijesti opterećenja pri prodiranju klinastog tijela u nepomičnim točkama A i B

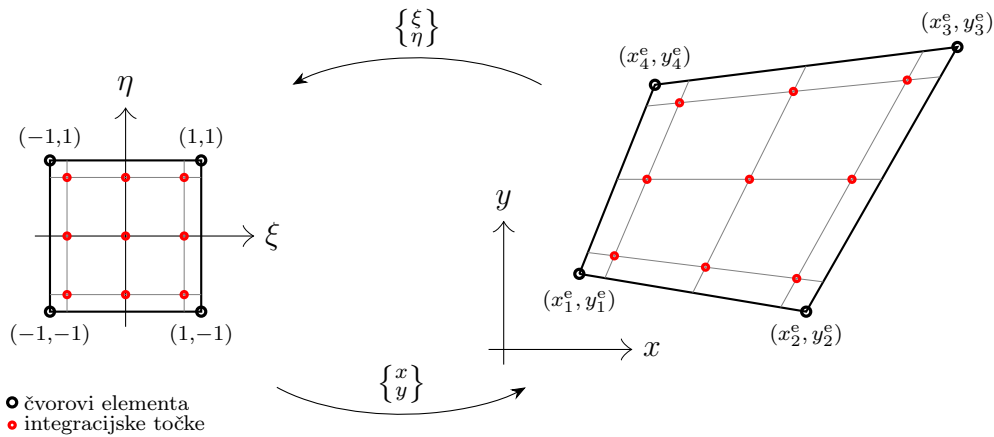
koordinatnom sustavu polazne domene (Slika 5.8):

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta)$$

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i^e$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i^e$$

gdje su (ξ_i, η_i) koordinate čvorova u prirodnim koordinatama, a (x_i^e, y_i^e) koordinate čvorova u polaznoj domeni



Slika 5.8: Položaji čvorova i integracijskih točaka u osnovnoj i fizičkoj domeni

3. preslikavanje tlakova u integracijske točke interpolacijom iz hidrodinamičke mreže (Slika 5.9)
4. računanje ukupne sile po elementu numeričkim integriranjem

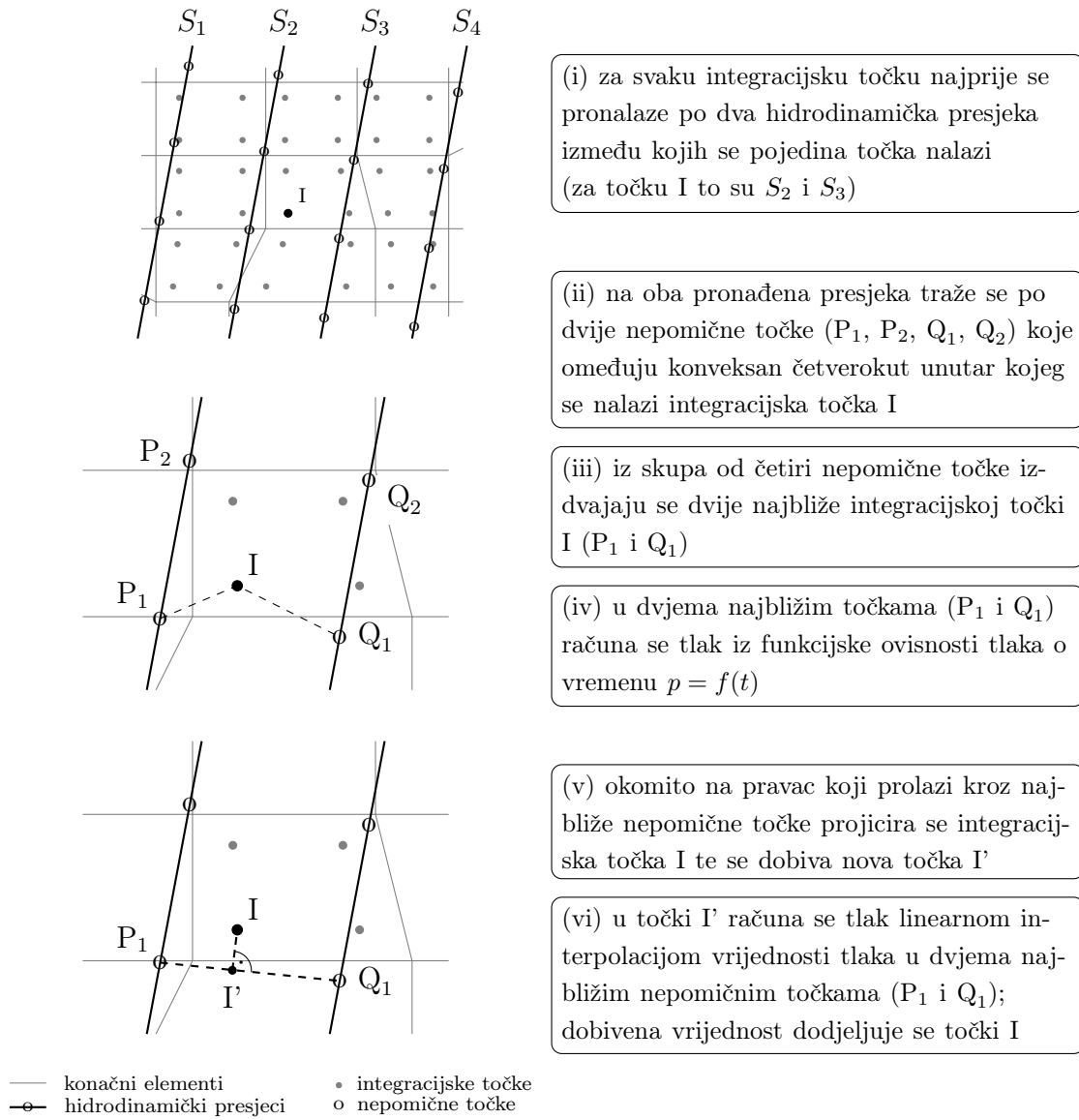
5. računanje površine elementa. U općem slučaju konačni element ima oblik konveksnog četverokuta čija površina se računa sljedećom formulom:

$$A_{el} = \frac{1}{2} |\vec{d}_{13} \times \vec{d}_{24}|$$

gdje su \vec{d}_{13} i \vec{d}_{24} vektori dijagonala četverokuta

6. dijeljenjem ukupne sile s površinom dobiva se konstantni tlak kojim se opterećuje konačni element

Interpolacijska procedura preslikavanja tlakova s hidrodinamičke na strukturnu mrežu opisana je Slikom 5.9, [71].



Slika 5.9: Skica postupka preslikavanja s hidrodinamičke na strukturnu mrežu

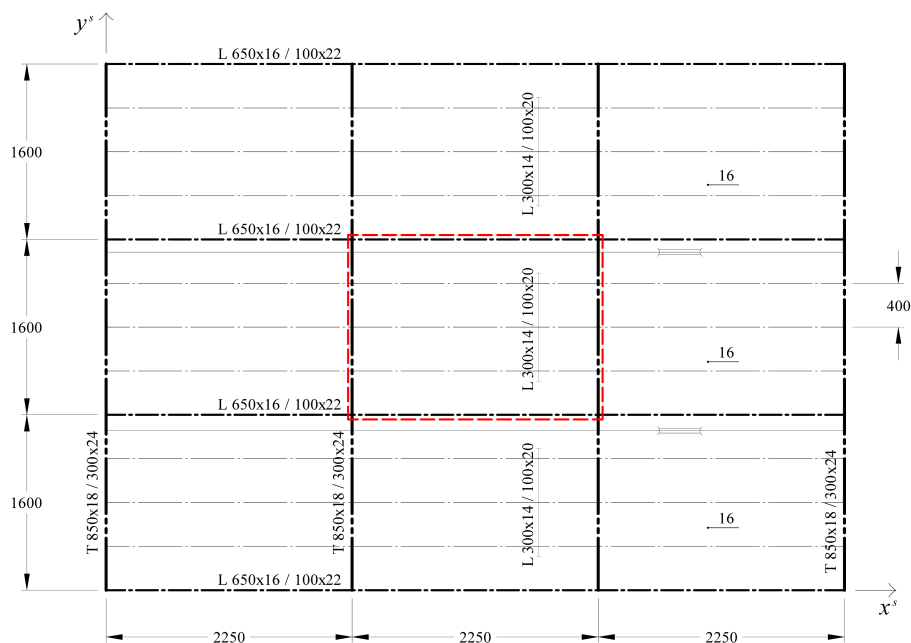
5.6. Analiza lokalnog odziva strukture na primjeru MKE modela dijela brodskog dna

5.6.1. Opis strukture modela

Analiza lokalnog strukturnog odziva provedena je na primjeru roštiljne konstrukcije brodskog dna. Topologija strukture (broj i raspored ukrepa, pozicija jakih poprečnih i uzdužnih nosača) uzeta je iz rada T. Jančijeva (1978) [72] u kojem je prikazana jednostavna metoda proračuna dinamičkog odziva uslijed udarnih opterećenja.

Osnovni topološki model roštilja iz spomenutog rada proširen je i produljen tako da se dobila struktura sastavljena od devet ukrepljenih panela tercijarne razine smještenih između poprečnih i uzdužnih primarnih nosača (Slika 5.10). Pod lokalnom strukturom podrazumijeva se dio tankostijene konstrukcije koja prva reagira nakon djelovanja opterećenja. U slučaju udaranja o valove to je vanjsko opločenje u neposrednom dodiru s opterećenjem koje zatim trenutno prenosi odziv na pripadne ukrepe te jake poprečne i uzdužne nosače.

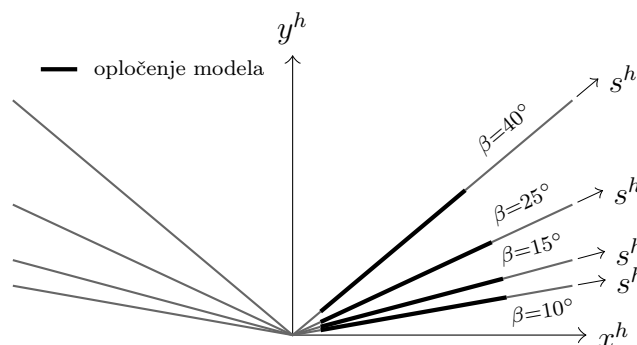
Lokalni dio konstrukcije koji se razmatra na modelu je središnji ukrepljeni panel omeđen s jakim nosačima. Proširivanjem i produljivanjem modela nastojao se ublažiti utjecaj pretpostavljenih rubnih uvjeta na točnost rješavanja. Na Slici 5.10 označen je odabrani osnovni topološki model ukrepljenog panela i lokalni dio strukture na kojoj je analiziran odziv nakon MKE proračuna. Ishodište koordinatnog sustava MKE modela smješteno je u donjem desnom kutu u sjecištu jakih nosača, os x^s smještena je paralelno s poprečnim nosačem, os y^s paralelno s uzdužnim nosačem, a os z^s okomito na ravninu opločenja u smjeru ukrepljenja.



Slika 5.10: Nacrt ukrepljenog panela

Na globalnoj razini uzima se da je strukturni model dio klinaste forme. Smještaj

modela na poprečnom presjeku četiriju klinova različitih kutova nagiba prikazan je Slikom 5.11. Ishodište koordinatnog sustava globalne razine kao i ishodište hidrodinamičkog modela u početnom vremenskom trenutku smješteno je u istoj točki koja se nalazi na osnovici klina. Osi x^h i y^h smještene su u ravnini poprečnog presjeka. Okomito na poprečni presjek klin ne mijenja geometriju nego zadržava isti kut nagiba.



Slika 5.11: Skica smještaja ukrepljenog panela na poprečnim presjecima klinova

Dimenzije konstrukcijskih elemenata uglavnom su određene prema zahtjevima Pravila [58], a kao dodatni kriterij u obzir se uzela krutost lokalne strukture. Naime, izborom dimenzija elemenata konstrukcije nastojalo se povećati krutost, odnosno smanjiti prvi prirodni period vibriranja lokalne strukture kako bi se mogao primijeniti kvazi-statički način proračuna (Poglavlje 5.4.).

U Tablici 5.1 prikazane su izračunate vrijednosti Faltinsenovog parametra udaranja za sva četiri korištena klina pri konstantnoj brzini uranjanja. Vidljivo je da klinovi 25° i 40° u potpunosti ispunjavaju uvjete za kvazistatičkim proračunom opterećenja. Istovremeno preostala dva klina 10° i 15° nalaze se u prijelaznom području te se njihovi rezultati dobiveni kvazistatičkim modelom trebaju uzeti s mjerom opreza.

Tablica 5.1: Vrijednosti FPU za pojedine klinove pri brzini udara $V = 9$ m/s

β	10°	15°	25°	40°
FPU	0.707	1.075	1.871	3.366

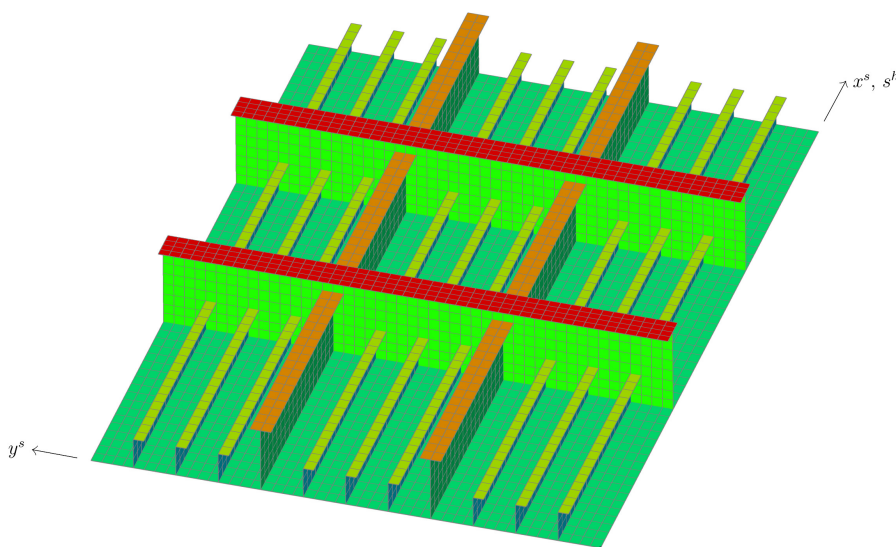
5.6.2. Diskretizirani MKE model i rubni uvjeti

Gledajući u cjelini svaki pojedini dio brodske konstrukcije može se svrstati u jednu od sljedećih skupina: oploćenje, primarni i sekundarni nosači. Oploćenje koje sačinjavaju velike ravne plošne strukture (npr. vanjska oplata) te primarni nosači u koje spadaju jaki uzdužni i poprečni nosači (npr. hrptenica, podveza, proveza) obično se u MKE modelima diskretiziraju korištenjem pločastih konačnih elemenata s po čest stupnjeva slobode gibanja svakog pojedinog čvora. Sekundarni

nosači nešto manjeg momenta otpora poprečnog presjeka (npr. uzdužnjaci i sponje) mogu se diskretizirati na tri načina:

- opločenje se modelira kao anizotropna ploča uključivanjem sekundarnih nosača čime se gubi mogućnost računanja distribucije naprezanja s obzirom da sekundarni nosači fizički ne postoje;
- modeliranje grednim konačnim elementima pri čemu se može računati distribucija naprezanja, ali ostaje problem na koji način postići ispravnu krutost uslijed međudjelovanja opločenja i sekundarnog nosača; u slučaju složenog modela s vrlo velikim brojem elemenata ovo je najefikasnije rješenje te se najčešće primjenjuje kod grubog modeliranja [38];
- modeliranje pločastim konačnim elementima koje se primjenjuje kod finijih modela.

Svi konstrukcijski elementi razmatranog primjera (Poglavlje 5.6.1.) diskretiziraju se četveročvornim izoparametarskim konačnim elementom s ravnim stranicama koji je u NASTRAN rješavaču poznat pod imenom CQUAD4 [73] (Dodatak A). Sva četiri čvora imaju po šest stupnjeva slobode gibanja. Time se na ispravan način tretiraju ravninske i izvan ravninske deformacije koje se javljaju uslijed vanjskog opterećenja. Nedostatak opisanog elementa je nepostojanje izravne elastične krutosti oko osi okomite na ravninu elementa što može uzrokovati singularnu matricu krutosti. Problem se može izbjeći na način da se rotacijskim stupnjevima slobode bez krutosti postave ograničenja ili njihovim ukrućivanjem proizvoljnom vrijednošću [74].



Slika 5.12: Diskretizirani MKE model u Femapu

Gustoća mreže MKE modela je jednoliko raspodijeljena po svim konstrukcijskim dijelovima. Cjelokupna domena nastojala se premrežiti konačnim elementima približno istih dimenzija kako bi se izbjegla eventualna upotreba trokutnih elemenata

pri prijelazu s finije na grublju mrežu i obratno. Osnovne dimenzije elemenata određuju se prema karakteristikama odziva koji se želi ispitati. Naime, na poprečnim presjecima strukturnih nosača primarnog i sekundarnog tipa normalna, savojna i smična naprezanja nemaju istu raspodjelu po visini. S obzirom da je jedan od ciljeva utvrditi raspodjelu smičnih naprezanja u nosačima čija je distribucija kvadratična funkcija prostorne koordinate minimalni broj elemenata koji je potreban po visini presjeka je tri. Shodno tome, struk jakog uzdužnog nosača modeliran je s 8, struk jakog poprečnog nosača sa 6, a struk ukrepa s 3 konačna elementa. Takav odabir rezultirao je prosječnom dimenzijom elemenata od 100×125 mm (Slika 5.12).

Rubni uvjeti na modelu postavljeni su duž četiri rubne stranice na način da su spriječene rotacije oko osi okomite na ravninu oploćenja (os z) i oko osi okomite na pojedinu stranicu (os y za stranice 'a' i 'c' te os x za stranice 'b' i 'd', Tablica 5.2).

Tablica 5.2: Rubni uvjeti MKE modela (T – translacija, R – rotacija)

stranice	spriječeni pomaci		
a, c	T_x	T_z	R_z
b, d	T_y	T_z	R_z

5.6.3. Opterećenje modela

Hidrodinamički dio proračuna poboljšanom poopćenom Wagnerovom metodom proveden je za svaki od četiri odabrana klina (nagibi 10° , 15° , 25° i 40°). Za potrebe analize lokalnog odziva uzeti su jednaki parametri udaranja u svim poprečnim presjecima modela. Takav pristup, uz nepromjenjivu geometrijsku formu u uzdužnom smjeru roštilja (koordinatna os y^s strukturnog modela), omogućava izvođenje samo jednog hidrodinamičkog proračuna po klinu za određenu brzinu prodiranja. Na tako definiranom modelu raspodjela opterećenja duž presjeka paralelnih s koordinatnom osi y^s je uniformna.

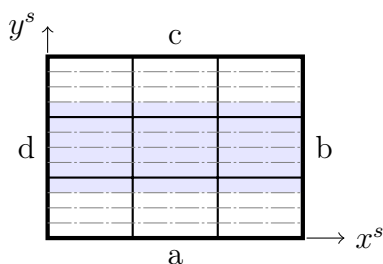
U Tablici 5.3 navedene su vrijednosti parametara prodiranja korištene u proračunima: V – brzina prodiranja, h_0 – početni uron presjeka, ρ – gustoća tekućine.

Tablica 5.3: Parametri prodiranja

V	h_0	ρ
(m/s)	(m)	(kg/m ³)
9	0	1000

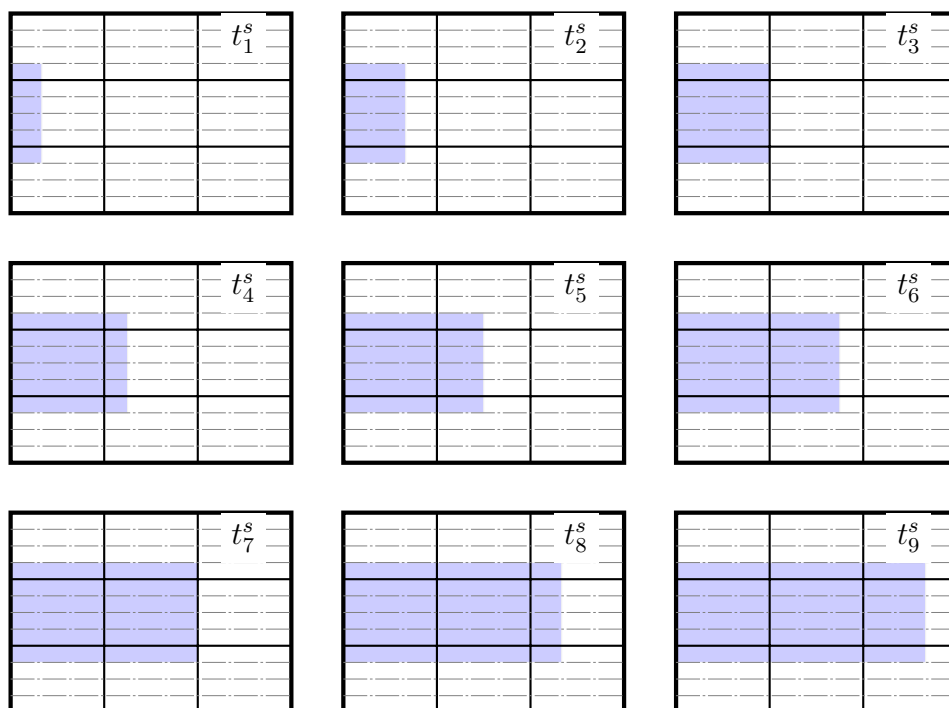
Područje u smjeru y^s osi na kojem je zadano opterećenje modela suženo je na usku zonu koja obuhvaća središnji ukrepljeni panel tercijalne razine strukture (Slika 5.13). Odabirom ovakve raspodjele umjesto zadavanja opterećenja po čitavoj širini

modela nastojala su se izbjeći nerealno velika naprezanja u pojasevima jakih nosača zbog utjecaja rubnih uvjeta.



Slika 5.13: Skica modela s označenim stranicama i područjem djelovanja opterećenja

S druge strane ograničavanjem područja djelovanja uniformne raspodjele opterećenja ograničava se i mogućnost pogrešne interpretacije odziva. Naime, u realnim uvjetima parametri udaranja (brzina udara, početni gaz presjeka, itd.) razlikuju se od presjeka do presjeka te time uzrokuju nejednoliku raspodjelu opterećenja i duž osi okomite na smjer uranjanja.



Slika 5.14: Prikaz područja djelovanja tlaka za prvih devet trenutaka

Izračunati tlakovi prebačeni su na sva četiri MKE modela na način opisan Slikom 5.9 za 12 odabranih vremenskih trenutaka (t^s). Svaki od odabranih trenutaka na pojedinom klinu tretiran je kao posebni slučaj opterećenja kvazistatičkog proračuna. Zbog usporedivosti odziva nastojalo se postići da u svakom od trenutaka t_i^s , $i = \{1, 2, \dots, 12\}$ kontaktna točka bude na istoj poziciji gledano u lokalnom koordinatnom sustavu MKE modela (koordinata s^h , odnosno x^s). Na Slici 5.14 prikazana su područja vanjskog oploćenja na koja djeluje tlak u prvih devet odabranih

vremenskih trenutaka, dok je Slikom 5.15 prikazana prostorna raspodijela tlaka duž konture tijela (s^h) u četiri odabrana trenutka t_3^s , t_6^s , t_9^s i t_{12}^s (Tablica 5.4).

Tablica 5.4: Vremenski trenuci t_3 , t_6 , t_9 i t_{12} pojedinih klinova

	$t_3(s)$	$t_6(s)$	$t_9(s)$	$t_{12}(s)$
10°	0.0399	0.0615	0.0864	0.1220
15°	0.0602	0.0927	0.1299	0.1870
25°	0.0998	0.1539	0.2155	0.3300
40°	0.1707	0.2558	0.3528	0.4890

Projektni tlak. Dimenzioniranje konstrukcijskih elemenata u skladu s Pravilima klasifikacijskih društava zasniva se na određivanju vrijednosti tlaka koji se javlja kao posljedica djelovanja vanjskih sila na lokalni dio strukture. Spomenuta vrijednost naziva se projektni tlak te se najčešće računa pomoću jednostavnih izraza s uključenim parametrima koji značajno utječu na određeni tip lokalnog opterećenja.

Radi usporedbe s vrijednostima opterećenja iz direktnog proračuna pomoću poboljšane poopćene Wagnerove metode, računaju se vrijednosti projektnog tlaka za sva četiri klinasta tijela u skladu s preporukama kvalifikacijskog društva DNV (u daljnjem tekstu DNV–Loads) [75].

Projektni tlak uslijed udaranja o valove prema Pravilima definira se kao prosječna vrijednost prostorne raspodjele tlaka (DNV–Loads, odjeljak 8.7.2.2) na području koje obuhvaća oploćenje između nekoliko ukrepa. U slučaju kada se hidroelastični efekti mogu zanemariti, odnosno kad vrijedi $FPU > 0,25$ (DNV–Loads, odjeljak 8.7.3), projektni tlak računa se iz sljedećeg izraza:

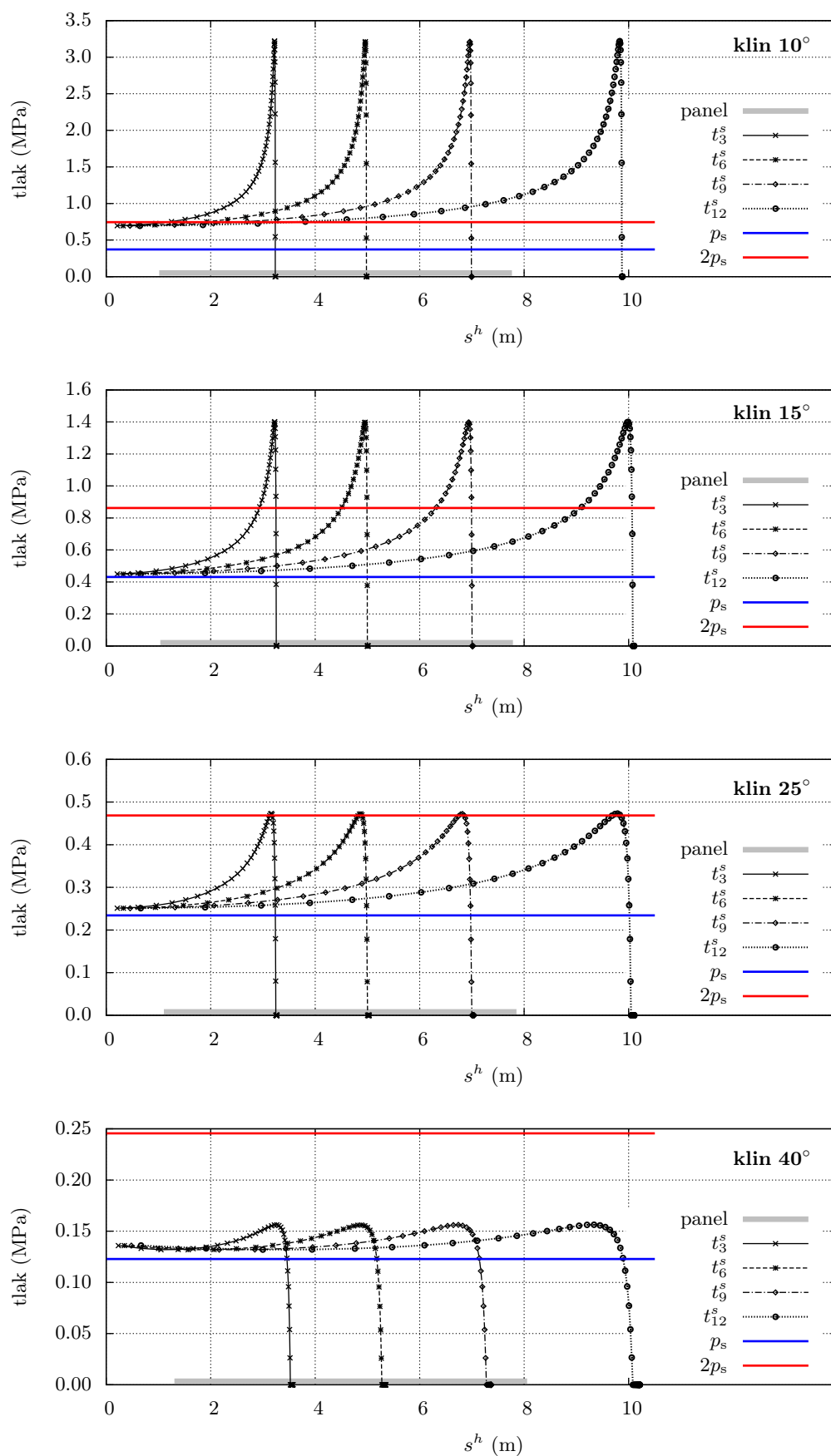
$$p_s = \frac{1}{2} \rho C_{Pa} V^2 \quad (5.19)$$

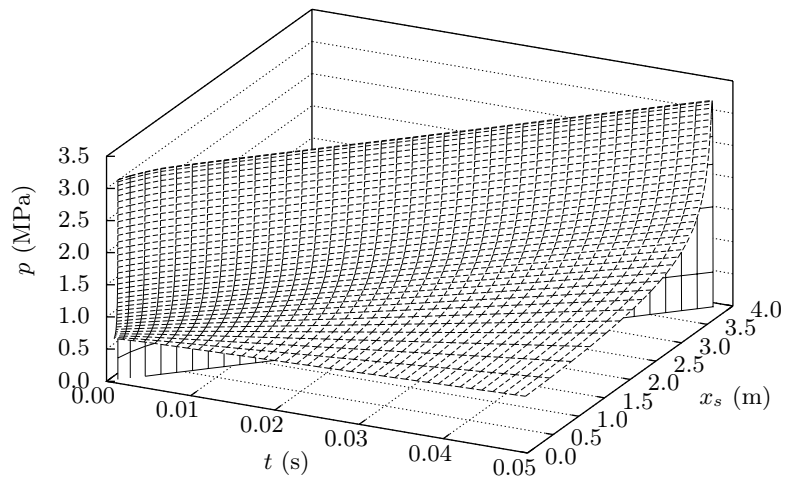
gdje ρ predstavlja gustoću fluida, V brzinu udara (odnosno relativnu brzinu između površine tijela i nailazećeg fluida), a C_{Pa} koeficijent tlaka.

Za tijelo klinastog poprečnog presjeka, pri dimenzioniranju ukrepa i jačih nosača, koeficijent tlaka računa se iz sljedeće funkcije (DNV–Loads, odjeljak 8.7.2.7):

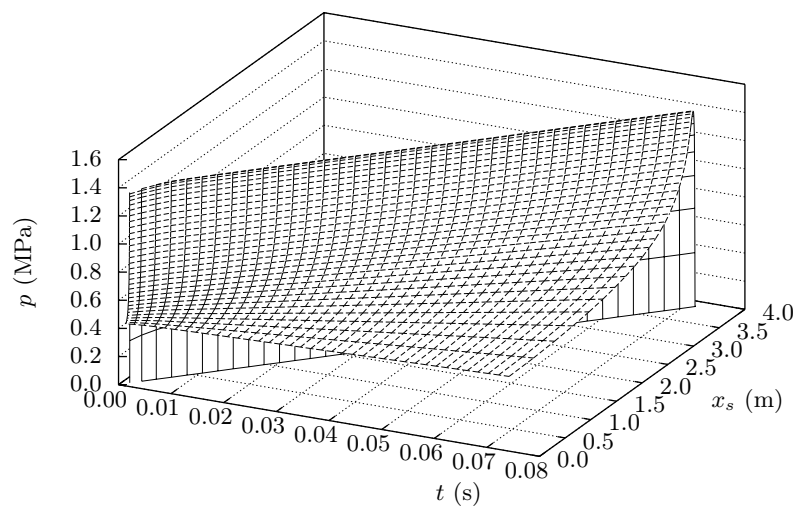
$$C_{Pa} = \begin{cases} 2\pi & \beta = 0^\circ \\ 0,2548 \beta + 2\pi & 0^\circ < \beta \leq 15^\circ \\ \frac{2,5}{(\text{tg } \beta)^{1,1}} & \beta > 15^\circ \end{cases} \quad (5.20)$$

Za dimenzioniranje oploćenja izloženog udaranju pri računanju projektnog tlaka potrebno je uzeti dvostruku vrijednost koeficijenta tlaka u odnosu na onu dobivenu prema funkciji (5.20) (DNV–Loads, odjeljak 8.7.2.8). Obje vrijednosti projektnog tlaka (za ukrepe i jače nosače odnosno oploćenje) prikazane su na dijagramima prostorne raspodjele (Slika 5.15).

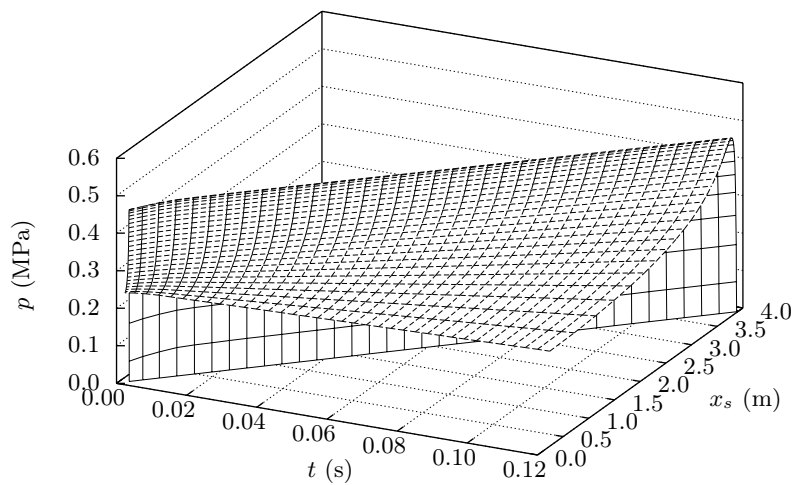
Slika 5.15: Prostorna raspodjela tlaka duž koordinate s^h u trenucima t_3^s , t_6^s , t_9^s i t_{12}^s



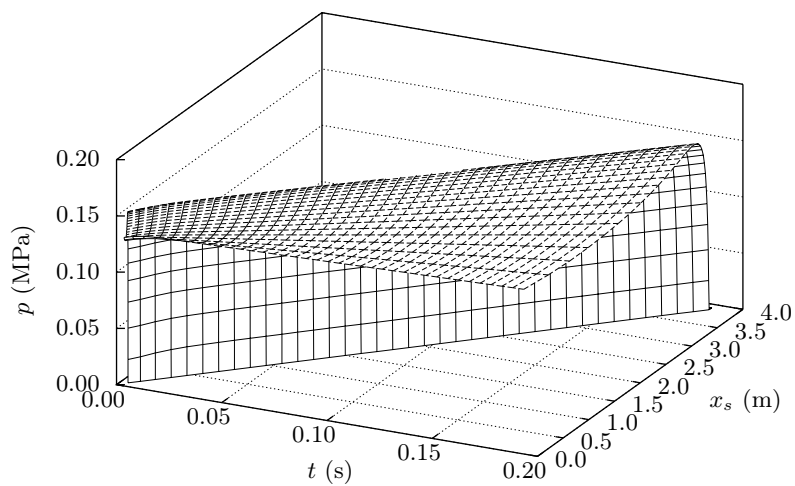
Slika 5.16: Prostorno-vremenska raspodijela tlaka (klin 10°)



Slika 5.17: Prostorno-vremenska raspodijela tlaka (klin 15°)



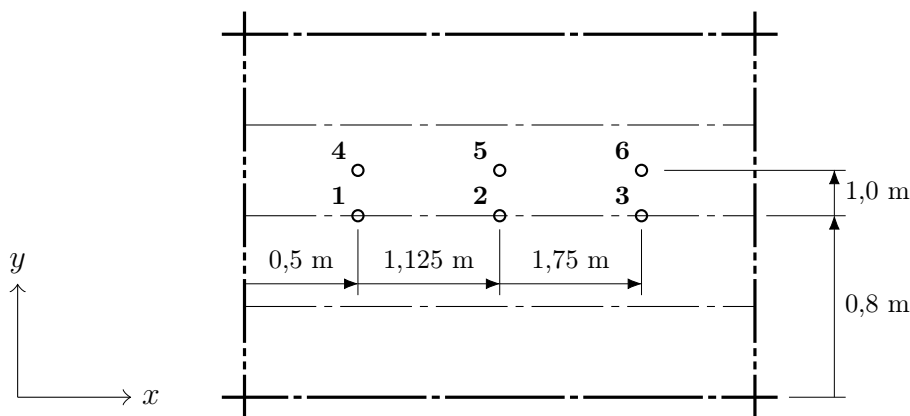
Slika 5.18: Prostorno-vremenska raspodijela tlaka (klin 25°)



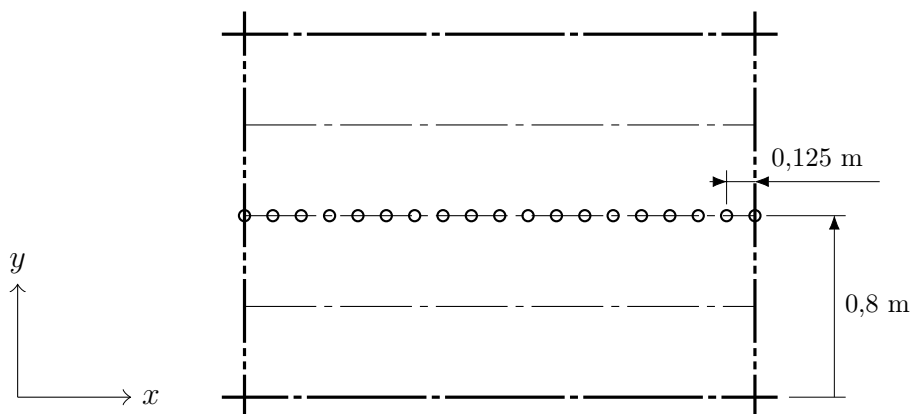
Slika 5.19: Prostorno-vremenska raspodijela tlaka (klin 40°)

5.6.4. Pomaci

Vertikalni pomaci MKE modela očitavani su u apsolutnim iznosima na sredini središnjeg dijela ukrepljenog panela. Na tri pozicije na središnjoj ukrepi te na opločanju između ukrepa (Slika 5.20) očitavani su pomaci u svih dvanaest vremenskih trenutaka te prikazani u ovisnosti o vremenu (Slika 5.22). U čvorovima središnje ukrepe (Slika 5.21) pomaci su očitavani u četiri trenutka t_2 , t_5 , t_8 i t_{11} te prikazani u ovisnosti o poprečnoj koordinati x (Slika 5.23).



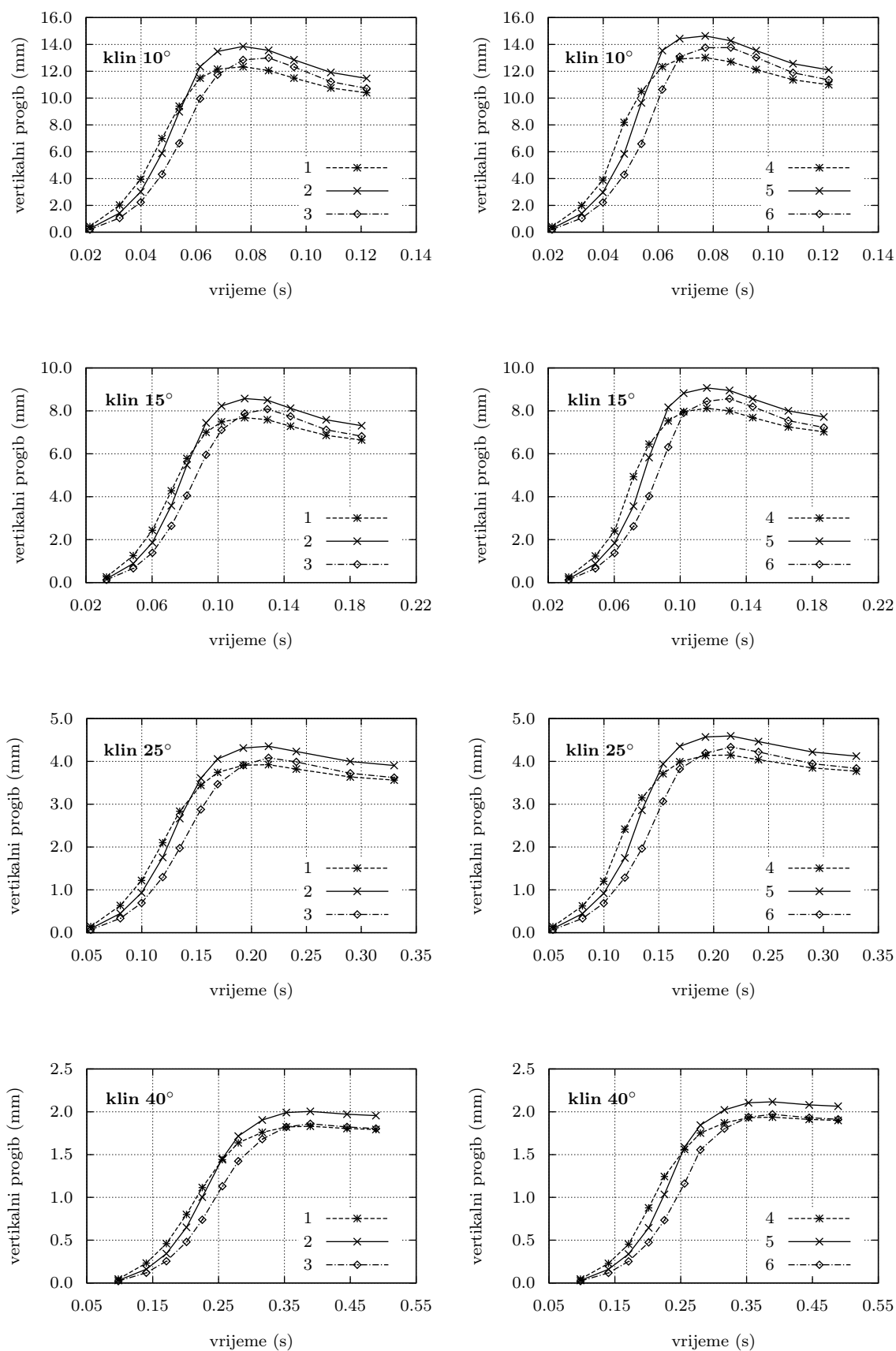
Slika 5.20: Položaji čvorova modela u kojima su očitavani pomaci u smjeru z koordinate radi prikaza ovisnosti o vremenu



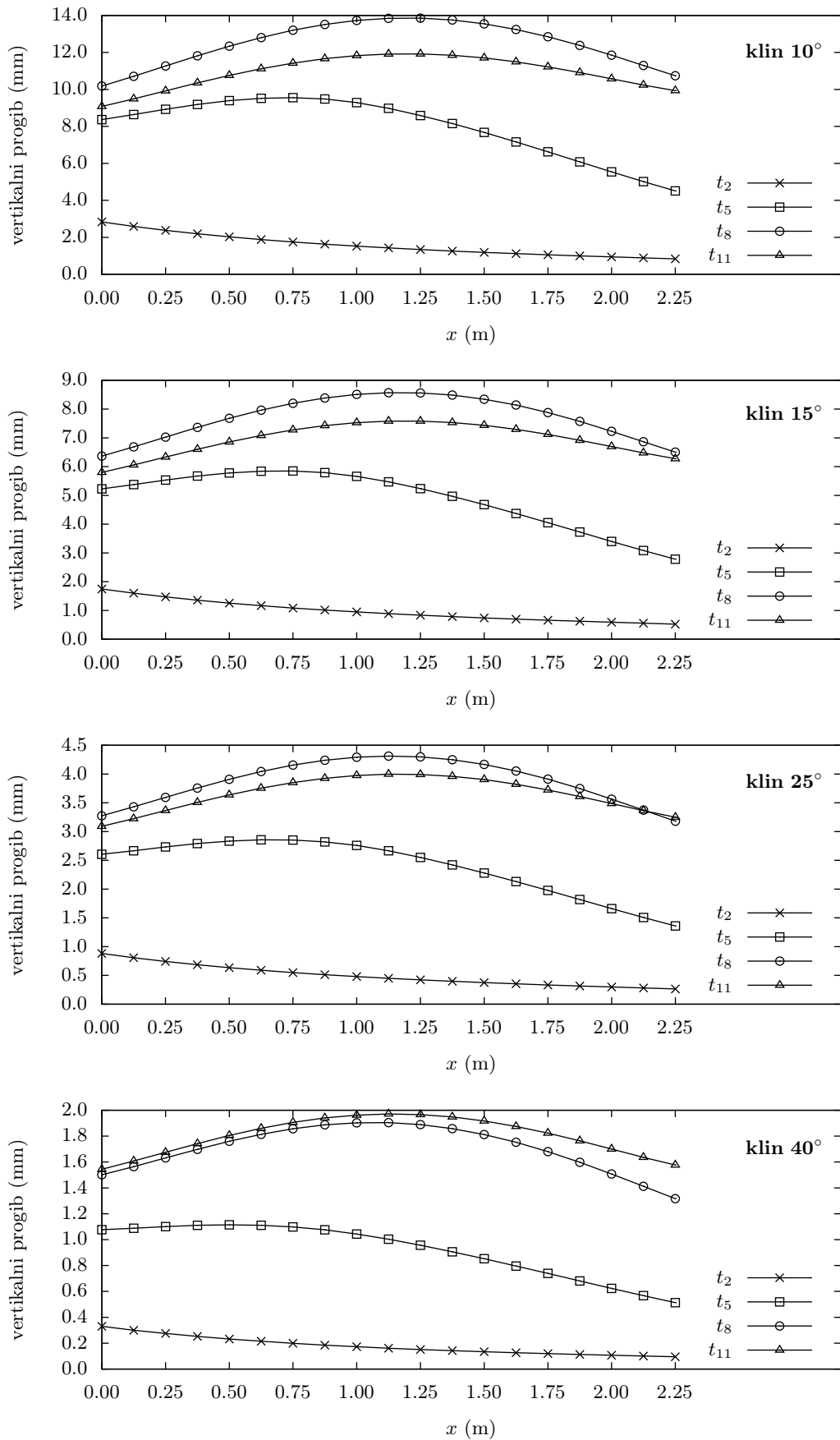
Slika 5.21: Položaji čvorova modela u kojima su očitavani pomaci u smjeru z koordinate radi prikaza prostorne raspodjele

Na središnjoj ukrepi kao i na opločanju između ukrepa funkcija vremenske promjene vertikalnih pomaka (Slika 5.22) ima slično ponašanje: iznosi naglo rastu sve dok vršni dio opterećenja ne dosegne sredinu trećeg dijela ukrepljenog panela (trenuci t_8 i t_9 , slika 5.14), a zatim opadaju s manjim gradijentom.

Prostorna raspodjela (Slika 5.23) pokazuje da se maksimalni progibi javljaju na poziciji djelovanja vršnog dijela opterećenja osim u slučajevima kada se vršni dio ne nalazi na središnjem dijelu panela nego na prvom ili trećem. Tada se položaj maksimalnih progiba pomiče prema krajevima ukrepe.



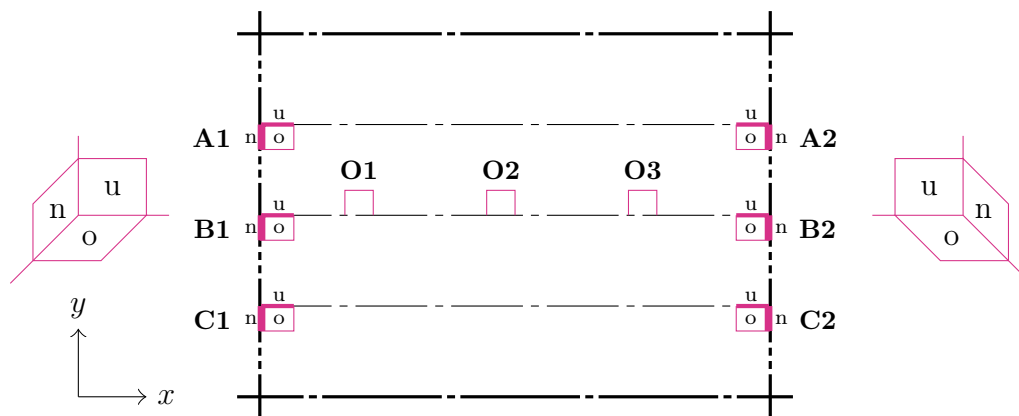
Slika 5.22: Vremenska promjena apsolutnih pomaka u smjeru z koordinate na oda-branim pozicijama na modelu, slika 5.20



Slika 5.23: Progibi modela na označenim pozicijama, slika 5.21, u vremenskim trenucima t_2 , t_5 , t_8 i t_{11}

5.6.5. Naprezanja prema kriteriju von Misesa

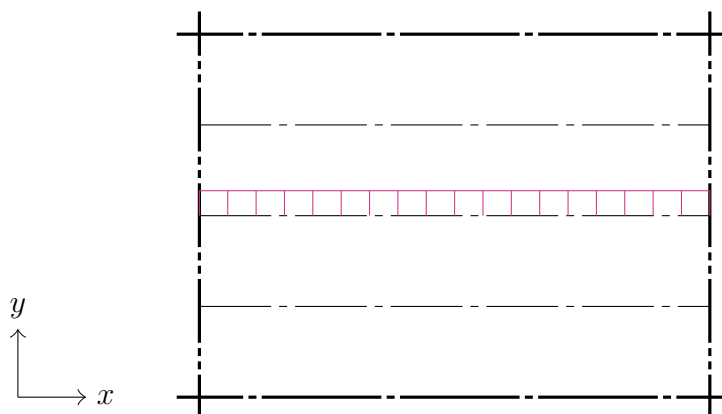
Naprezanja prema teoriji najveće distorzijske energije (von Mises naprezanja) očitavana su na spoju jakih uzdužnih nosača, ukrepa i opločenja panela kao i na samom opločenju (O1, O2, O3). Na aksonometrijskom prikazu uvećano su prikazani elementi na spoju opločenja panela, ukrepe i jakog nosača na kojima su vršena očitavanja. Znak 'o' označava konačni element na opločenju, 'u' konačni element na ukrepi, a 'n' konačni element na uzdužnom jakom nosaču (Slika 5.24).



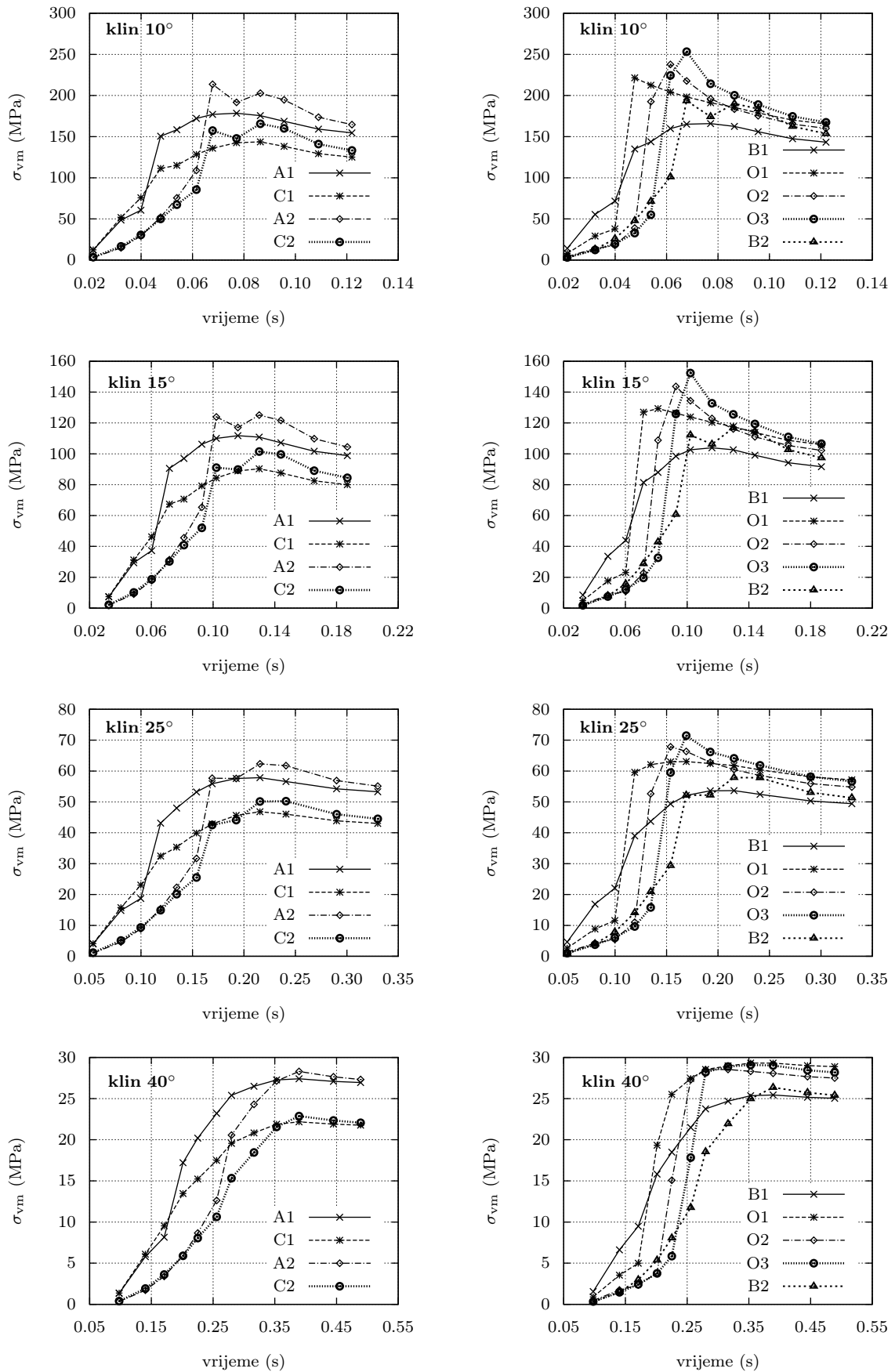
Slika 5.24: Položaji elemenata modela u kojima su očitana von Mises naprezanja radi prikaza vremenske ovisnosti

Očitane vrijednosti prikazane su dijagramima kao funkcije vremena. Sve ih karakterizira ubrzani rast naprezanja u prvim trenucima sve dok preko njihovog položaja ne prijeđe vršak opterećenja nakon čega vrijednosti neznatno opadaju. Opadanje vrijednosti izraženije je kod klinova većeg kuta nagiba, slika 5.26, s obzirom da im opterećenje značajno pada nakon prolaska vršnog dijela (Slika 5.15).

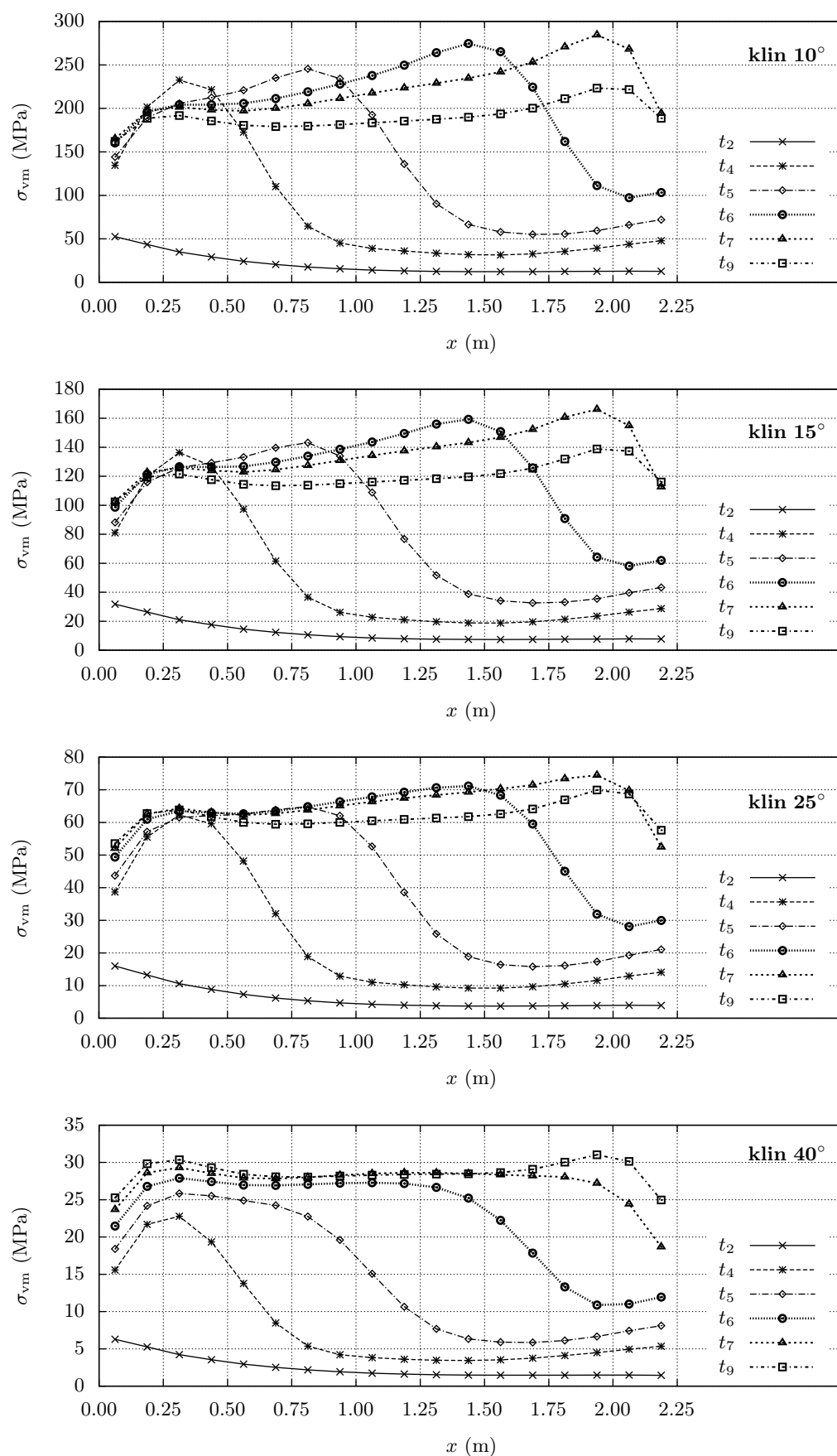
Slikom 5.27 prikazana je prostorna raspodjela von Mises naprezanja za šest karakterističnih trenutaka t_2 , t_4 , t_5 , t_6 , t_7 i t_9 koja su očitavana na konačnim elementima označenim na slici 5.25.



Slika 5.25: Položaji konačnih elemenata na oplati u kojima su očitavana von Mises naprezanja radi prikaza prostorne raspodjele



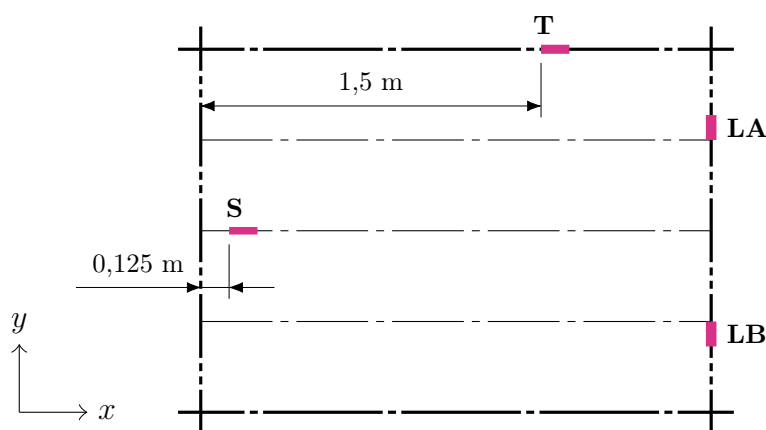
Slika 5.26: Vremenska promjena naprezanja po teoriji von Misesa očitanim na pozicijama A1(2), B1(2), C1(2) i O1(2,3), slika 5.24



Slika 5.27: Promjena naprezanja po teoriji von Misesa duž ukrepljenog panela, slika 5.25

5.6.6. Smična naprezanja

Smična naprezanja očitavana su po visini struka uzdužnog (LA, LB) odnosno poprečnog (T) jakog nosača i središnjoj ukrepi (S) na označenim pozicijama (Slika 5.28). U dijagramima s prikazanim rezultatima proračuna 1 označava konačni element naslonjen na opločenje panela kojeg zatim redom slijede ostali prema pojasu dotičnog nosača. Rezultati su prikazani za svaki element odvojeno u ovisnosti o vremenskim trenucima u kojima su izračunati kvazistatičkom analizom. Svaki pojedini klin prikazan je na odvojenom dijagramu.



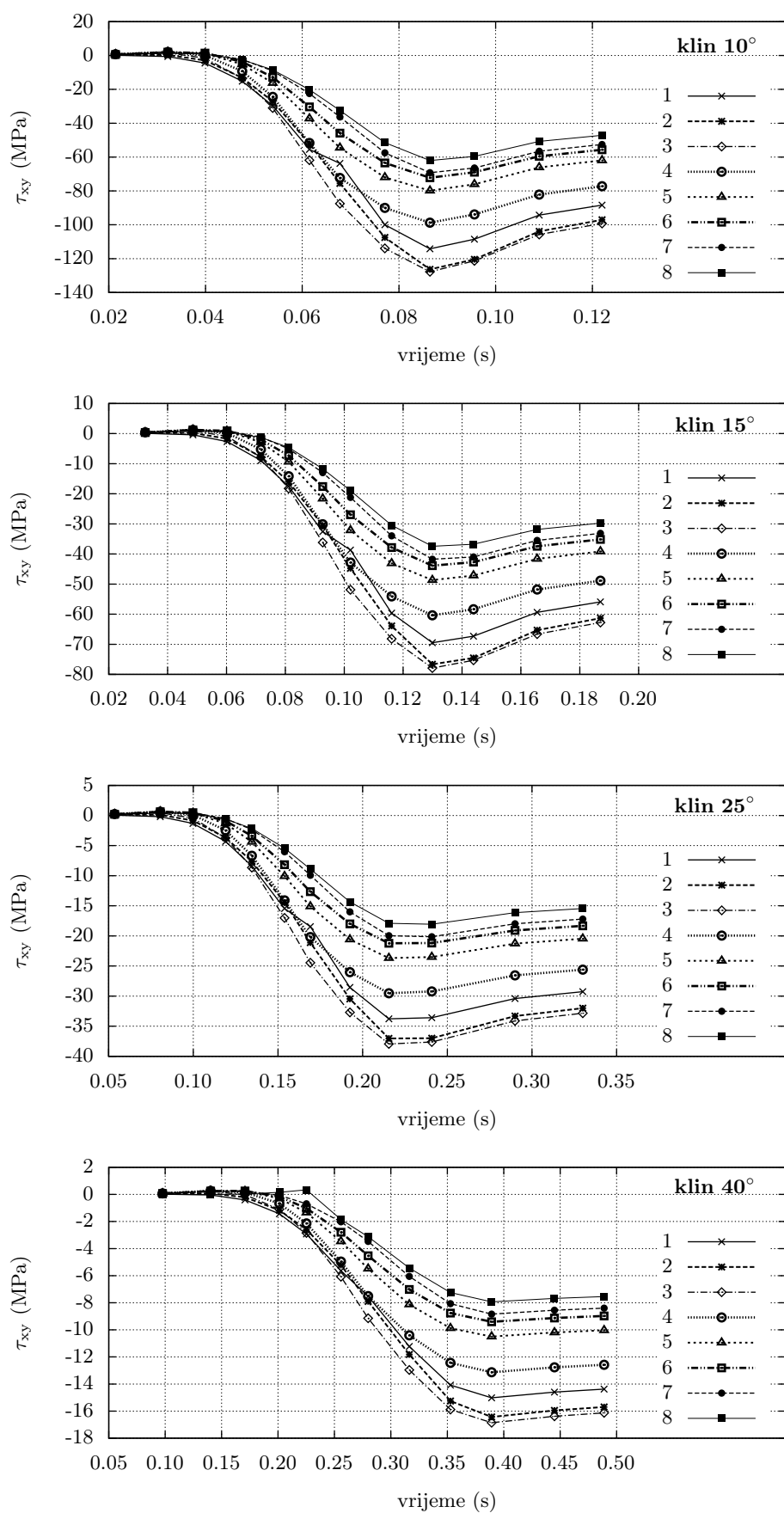
Slika 5.28: Položaji elemenata modela u kojima su očitana smična naprezanja

Vrijednosti smičnih naprezanja uzdužnog jakog nosača u početnim trenucima rastu s malim gradijentom u vremenu, nakon čega slijedi rast s kontinuiranim povećanjem gradijenta sve do trenutka kada vršni dio opterećenja ne dosegne sredinu susjednog ukrepljenog opločenja (t_9).

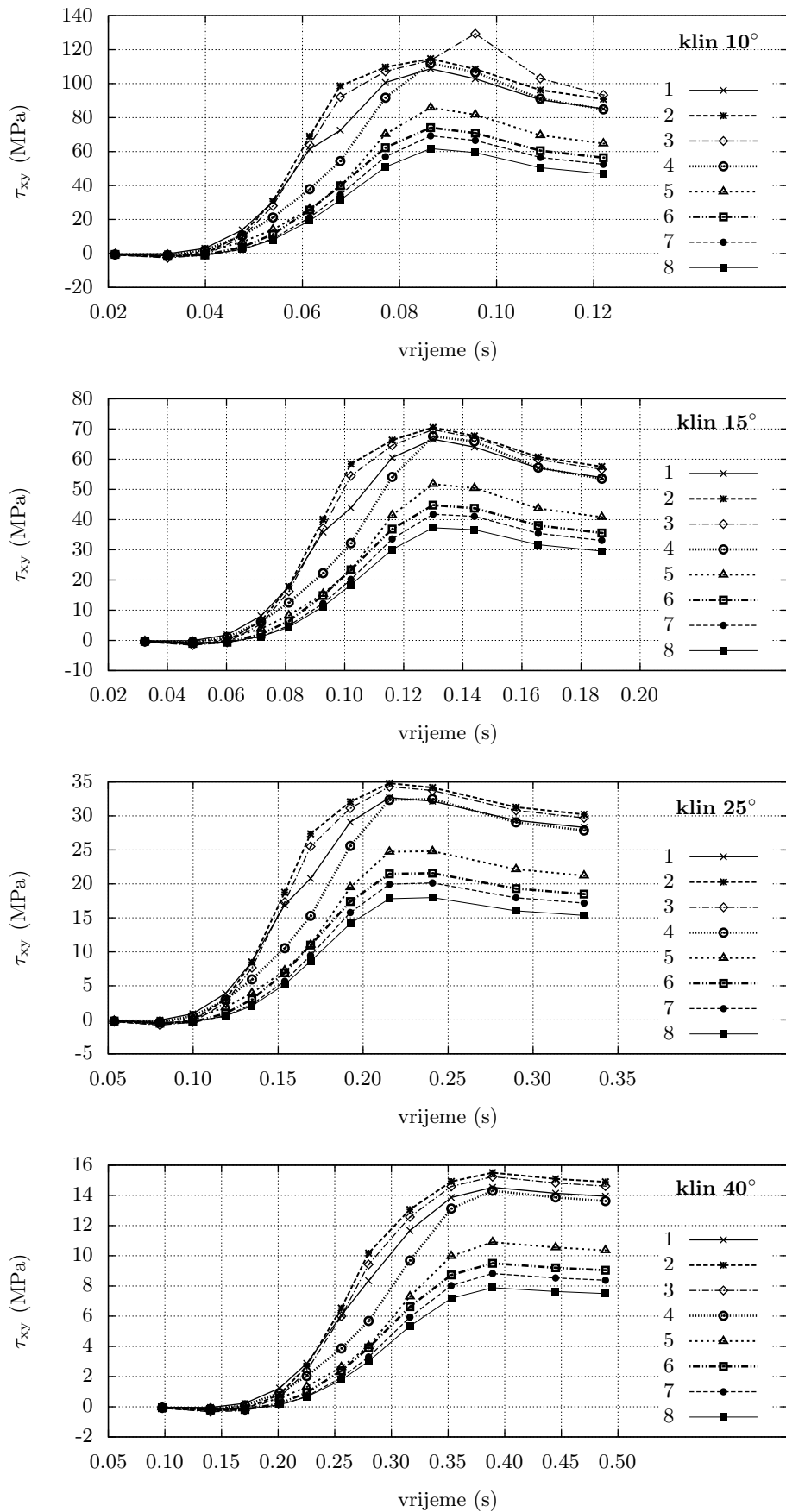
Nakon toga naprezanja ili stagniraju kao što je slučaj s klinom nagiba 40° ili su u blagom padu kao što je slučaj s ostalim klinovima. Takvo ponašanje je u skladu s oblikom prostorne raspodjele tlaka na pojedinim klinovima. Naime, kod svih klinova osim kod onog s nagibom 40° vrijednosti tlaka nakon prelaska vršnog dijela su u opadanju.

U poprečnom jakom nosaču smična naprezanja rastu s jednolikim gradijentom sve do trenutka kada vršni dio opterećenja pređe preko položaja na kojem se vrše očitavanja (trenutak t_6). Nakon toga vrijednosti naprezanja padaju s većim gradijentom sve do trenutka dok vršni dio opterećenja ne dosegne sredinu susjednog ukrepljenog opločenja (t_9). U kasnijim trenucima vrijednosti naprezanja stagniraju između 5 i 10 MPa.

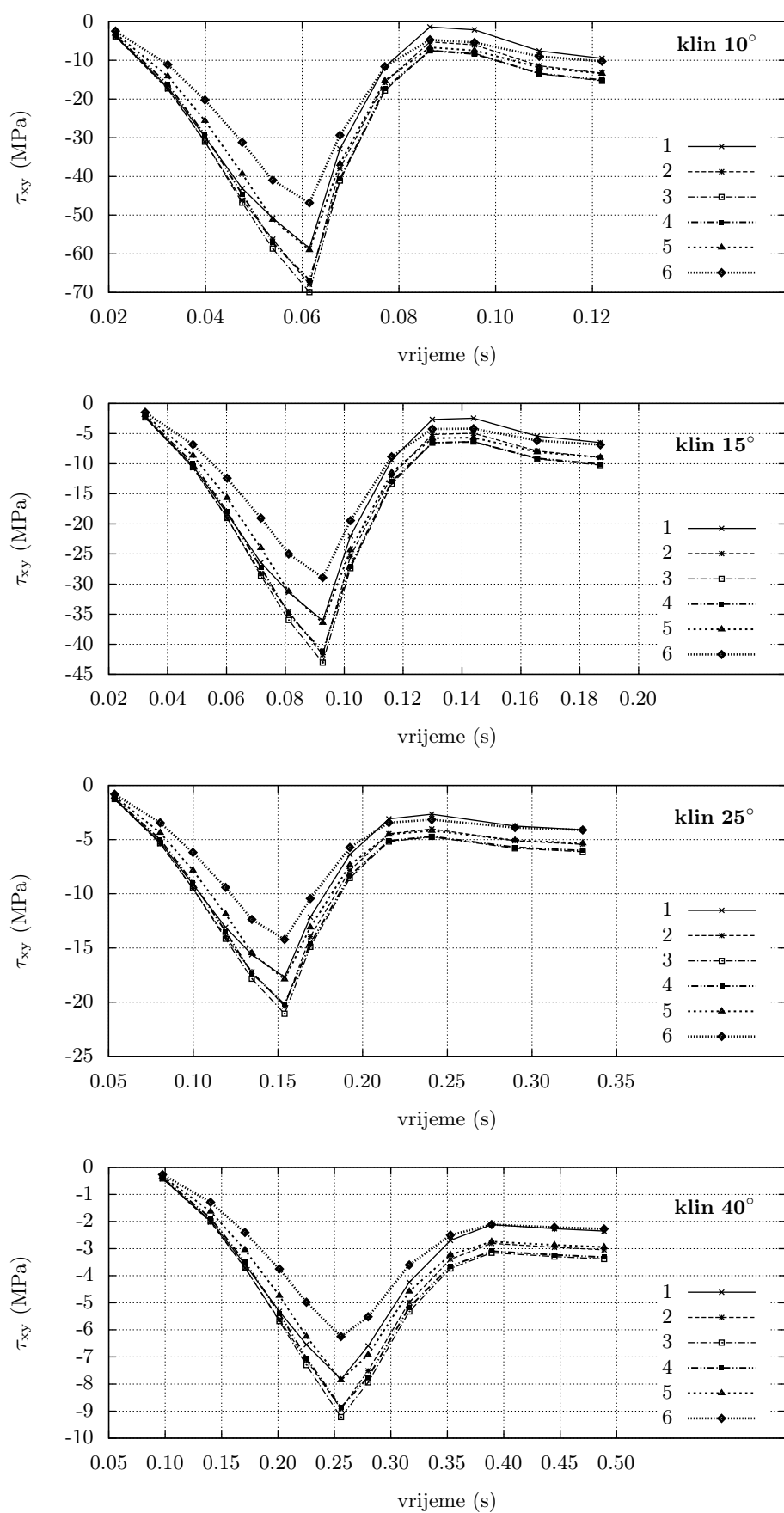
U početnim trenucima (t_1 do t_3), kada je opterećen samo prvi dio ukrepljenog panela, smična naprezanja na poprečnoj ukrepi središnjeg dijela panela su zanemarljivo mala. Nakon što opterećenje prijeđe na središnji dio ukrepljenog panela slijedi faza naglog rasta smičnih naprezanja s visokim gradijentom do trenutka kada vršni dio opterećenja ne dosegne poziciju koja se nalazi na tri četvrtine duljine središnjeg dijela (trenutak t_6 za klinove nagiba 10° i 15° odnosno trenutak t_7 za klinove nagiba 25° i 40°). Nakon toga vrijednosti naprezanja su u laganom opadanju.



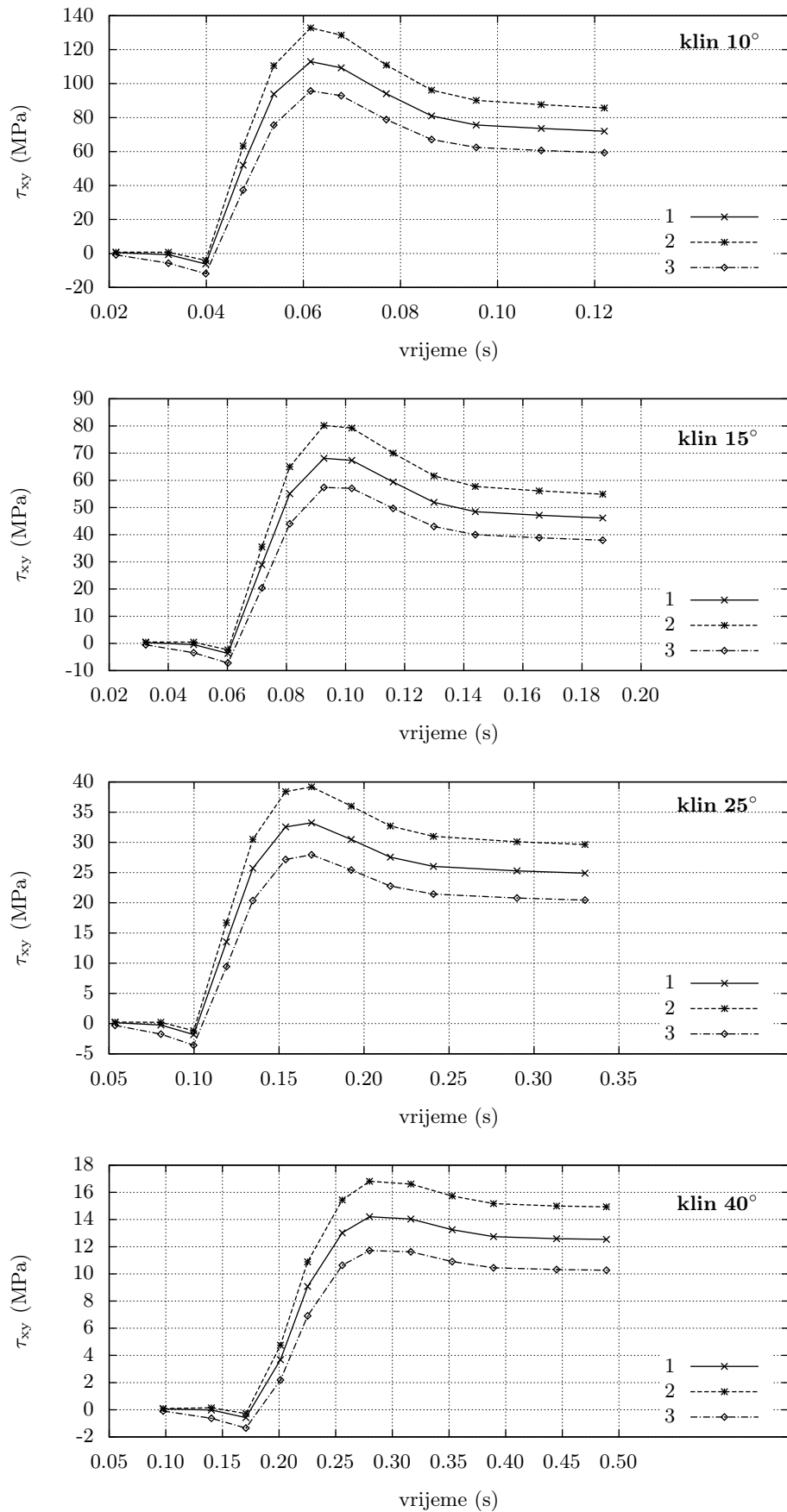
Slika 5.29: Vremenska promjena smičnih naprezanja po visini uzdužnog nosača na poziciji LA, slika 5.28



Slika 5.30: Vremenska promjena smičnih naprezanja po visini uzdužnog nosača na poziciji LB, slika 5.28



Slika 5.31: Vremenska promjena smičnih naprezanja po visini poprečnog nosača na poziciji T, slika 5.28



Slika 5.32: Vremenska promjena smičnih naprezanja po visini poprečnog nosača na poziciji S, slika 5.28

6. Zaključak

Postojeća poopćena Wagnerova metoda, koja se koristi pri proračunu opterećenja uslijed prodiranja tijela kroz tekućinu odnosno kod modeliranja udaranja plovniha objekata o valove, u potpunosti je izvedena i računalno implementirana u obliku proračunskog koda što je omogućilo detaljnu analizu svih njenih karakteristika.

Konvergencija rješenja analizirana je s obzirom na veličinu ulaznih parametara pri čemu su napravljene četiri skupine primjera. U obzir je uzeto pet parametara koji utječu na točnost konačnog rješenja, a to su veličina slobodne površine koja određuje položaj radijacijskog rubnog uvjeta, broj segmenata na slobodnoj i oplakanoj površini te omjeri dva susjedna segmenta na slobodnoj, odnosno oplakanoj površini. U svakoj pojedinoj skupini primjera variran je po jedan parametar u određenom rasponu vrijednosti, dok su ostali ostavljeni nepromijenjeni.

Analiza je pokazala da se rješenja na slobodnoj površini (brzine čestica fluida) i na oplakanoj površini (potencijal brzine) u blizini kontaktne točke slobodne površine s tijelom ponašaju u skladu s teorijskim modelom. U tom području, smanjivanjem veličine segmenata, vrijednosti brzina na slobodnoj površini teže ka neizmjernosti, dok vrijednosti potencijala imaju tendenciju prema nuli. Analizom ponašanja brzina na slobodnoj površini i potencijala na tijelu u odnosu na referentni model prodiranja (Mei i sur., 1999) pokazano je da, pri smanjivanju duljine segmenata u okolini kontaktne točke na slobodnoj površini, vrijednosti brzina brže konvergiraju prema teorijskoj vrijednosti nego vrijednosti potencijala pri analognoj promjeni duljina segmenata na tijelu.

Također, pokazano je da broj segmenata i omjer duljine dva susjedna segmenta na oplakanoj površini imaju zanemariv utjecaj na vrijednosti potencijala brzine. Najveći utjecaj na vrijednosti potencijala ima veličina i način diskretizacije slobodne površine. Jednako tako, pri prevelikim dimenzijama slobodne površine dobivene vrijednosti potencijala značajnije odstupaju u okolini kontaktne točke, dok u suprotnom slučaju, kada su dimenzije slobodne površine premale, značajnije odstupanje je primjećeno na preostalom dijelu oplakane površine.

Postavljanjem dinamičkog rubnog uvjeta na ravnu liniju u visini nastanka mlaza te uz rubni uvjet na oplakanoj površini koji je zadovoljen na stvarnoj geometriji tijela poopćeni Wagnerov model se na lokalnoj razini može opisati kao vanjsko potencijalno strujanje oko konveksnog klina. Imajući u vidu da u tom slučaju brzina fluida približavanjem kontaktnoj točki teži ka ∞ može se pokazati da u općem slučaju tlak teži ka $-\infty$. Posljedica toga su negativne vrijednosti tlakova koje se dobivaju u blizini kontaktne točke pri numeričkom proračunu. U postojećoj metodi taj se problem rješava zanemarivanjem negativnih vrijednosti tlaka te se integracija tlaka pri izračunu sile vrši samo za pozitivne vrijednosti.

Na temelju uočenih nedostataka postojeće metode proračuna razvijen je novi teorijski pristup u kojem je, uz korištenje istih rubnih uvjeta na rubovima domene kao i kod osnovne poopćene Wagnerove metode, drugačije definirana Greenova funkcija u sklopu integralne jednadžbe trećeg Greenovog identiteta te napravljena desingula-

rizacija rješenja izdvajanjem regularnog dijela potencijala pomoću funkcije kojom se opisuje utjecaj kontaktnih točaka na ponašanje rješenja u domeni strujanja.

Uvedena Greenova funkcija Kelvinovog tipa omogućila je jednostavnije zadavanje ulaznih parametara modela s obzirom da je uklonjena potreba za premreživanjem slobodne površine, a samim time i potreba za određivanjem veličine domene na istoj. Kako je u analizi osnovne poopćene Wagnerove metode pokazano da na rješenje problema dominantno utječe način diskretizacije i veličina domene na slobodnoj površini ovime je postignuta robusnost metode jer i u slučaju neadekvatne diskretizacije na oplakanoj površini dobivaju se zadovoljavajući rezultati što je posebno bitno kod 2D tijela nešto složenijeg geometrijskog oblika (npr. pramčani poprečni presjeci brodova vitke forme).

Također, uvođenjem nove funkcije potencijala brzine omogućilo se dobivanje točnijih rješenja u okolini kontaktnih točaka. Naime, vrijednosti potencijala brzine kod poboljšane poopćene Wagnerove metode brže konvergiraju prema teorijskoj vrijednosti nula koja vrijedi u kontaktnoj točki. Zahvaljujući tome omogućeno je točnije određivanje korekcije oplakivanja, a samim time i točnija prostorna distribucija tlakova u odnosu na polaznu metodu. Također, time su izbjegnute i prevelike numeričke oscilacije tlaka u okolini kontaktnih točaka.

Primjena poboljšane poopćene Wagnerove metode za proračun opterećenja uslijed udaranja o valove napravljena je na primjeru proračuna lokalnog strukturnog odziva roštiljne konstrukcije broskog dna u obliku ukrepljenog panela. Kako bi se izbjegao utjecaj geometrije na rezultate ista je pojednostavljena te je odabran klinasti poprečni presjek tijela odnosno analiziran je ravni ukrepljeni panel. Analizom je pokazano da naprezanja prema teoriji najveće distorzijske energije (von Mises) tijekom prodiranja tijela rastu s velikim gradijentom sve dok preko položaja na kojem se računaju ne prijeđe vršni dio opterećenja nakon čega dolazi do njihovog neznatnog opadanja.

Pokazano je da funkcija promjene u vremenu smičnih naprezanja po visini struka jakog uzdužnog nosača ima slično ponašanje kao i vremenska promjena von Mises naprezanja na proizvoljnoj poziciji duž ukrepljenog panela: nakon što vanjski tlak počne djelovati na dio opločenja između jakih nosača, jedan od kojih je i razmatrani nosač, smična naprezanja rastu s velikim gradijentom sve do prelaska vršnog dijela opterećenja preko odabrane pozicije nakon čega neznatno padaju.

Na poprečnom jakom nosaču smična naprezanja rastu velikim gradijentom odmah nakon što vanjski tlak počne djelovati na dio opločenja koje je u neposrednom dodiru s nosačem. Nakon prelaska vršnog dijela opterećenja slijedi nagli pad vrijednosti smičnih naprezanja s jednakim gradijentom kao i njihov rast.

Usporedba vrijednosti tlakova (Slika 5.15) dobivenih poboljšanom poopćenom Wagnerovom metodom s projektnim tlakovima prema Pravilima korištenjem istih parametara prodiranja (ρ , V) pokazala je da su projektni niži od izračunatih direktnim hidrodinamičkim proračunom pogotovu u širem području oko kontaktne točke gdje se prema hidrodinamičkom modelu dostižu vršne vrijednosti opterećenja. Razlika je izraženija kod klinova manjeg kuta nagiba ($< 15^\circ$) nego kod klinova srednje velikih kuteva nagiba ($15^\circ < \dots < 40^\circ$), dok je kod većih nagiba razlika neznatnija.

6.1. Znanstveni doprinos doktorskog rada

Znanstveni doprinos istraživanja u okviru doktorskog rada sastoji se u unaprjeđenju postojeće poopćene Wagnerove metode za proračun hidrodinamičkog tlaka pri prodiranju krutog tijela kroz tekućinu uvođenjem nove Greenove funkcije Kelvinovog tipa u integralnu jednadžbu problema te desingularizacijom rješenja u domeni strujanja definiranjem nove funkcije potencijala brzine kao umnoška funkcije koja opisuje ponašanje rješenja uslijed utjecaja kontaktnih točaka i funkcije regularnog dijela potencijala.

Nova formulacija problema poopćene Wagnerove metode omogućila je pouzdanije proračune tlaka na oplakanoj površini 2D tijela proizvoljnog oblika s obzirom da je uvođenjem Greenove funkcije Kelvinovog tipa uklonjena potreba za diskretizacijom domene na slobodnoj površini.

Desingularizacija funkcije potencijala brzine omogućila je točniji proračun potencijala brzine u okolini kontaktnih točaka čime je omogućeno razvijanje novog postupka izračuna pomaka slobodne površine između dva vremenska koraka. Shodno tome izbjegnute su prevelike numeričke oscilacije vrijednosti tlaka u okolini kontaktnih točaka.

6.2. Primjena rezultata doktorskog rada pri projektiranju konstrukcije plovni objekata

Spomenute karakteristike poboljšane poopćene Wagnerove metode omogućavaju jednostavniju implementaciju iste u modele tzv. direktnog proračuna odziva plovni objekata na uzburkanom moru. Za razliku od klasičnog pristupa zasnivanog na Pravilima gdje se odziv računa za niz ekvivalentnih slučajeva dobivenih kombiniranjem različitih projektnih opterećenja, direktnim metodama proračuna odziv se računa korištenjem potpuno spregnutih hidrodinamičko-strukturnih modela kojima se određuju ekstremna opterećenja za cjelokupni životni vijek konstrukcije.

Hidrodinamički dio modela koji se odnosi na određivanje opterećenja 3D tijela uslijed udaranja o valove zasniva se na vrpčastom pristupu u kojemu se razmatrani dio strukture ravninama dijeli na niz 2D presjeka koji se zatim zasebno računaju poboljšanom poopćenom Wagnerovom metodom koristeći parametre prodiranja dobivene proračunom pomorstvenosti.

Dobiveni tlakovi preslikavaju se na strukturni model preko Gaussovih točaka svakog pojedinog konačnog elementa u kojima se tlak za određeni vremenski trenutak dobiva interpolacijom vrijednosti funkcije povijesti tlaka dviju najbližih nepomičnih točaka na hidrodinamičkom modelu.

Opisani postupak implementiran je u numerički programski paket Homer koji je razvijen u istraživačkom odjelu klasifikacijskog društva Bureau Veritas kako bi se jednim alatom objedinila procedura direktnih proračuna hidrodinamičko-strukturne sprege u analizi kvazistatičkih i dinamičkih odziva plovni objekata na uzburkanom moru. Programski paket sastoji se od osnovnog hidrodinamičkog rješavača (Hydrostar) te dva strukturna rješavača (Nastran i Ansys). Uz osnovni hidrodinamički

rješavač u paketu se nalaze i dodatni hidrodinamički alati kao što su rješavač u frekvencijskoj domeni (Hmfreq), rješavač u vremenskoj domeni (Hmtime) te alat za postprocesiranje izlaznih rezultata (Hmstpp).

Poboljšana poopćena Wagnerova metoda za rješavanje prodiranja 2D tijela kroz tekućinu odnosno za simulaciju udara o val uklopljena je u programski paket u sklopu dodatnog alata za lokalna hidrodinamička opterećenja (Hmslam).

6.3. Smjernice za daljnja istraživanja

U sklopu daljnjih istraživanja potrebno je primijeniti novo razvijenu poboljšanu poopćenu Wagnerovu metodu kako bi se formulirao problem hidroelastičnog lokalnog odziva strukture u potpuno spregnutom obliku koji bi omogućio rješavanje elastičnih konstrukcija u slučaju malih vrijednosti Faltinsenovog parametra udaranja ($FPU < 0,50$). Kako je poboljšanom PPW metodom nestala potreba za diskretizacijom slobodne površine to je čini pogodnom za uklapanje u potpuno spregnute modele.

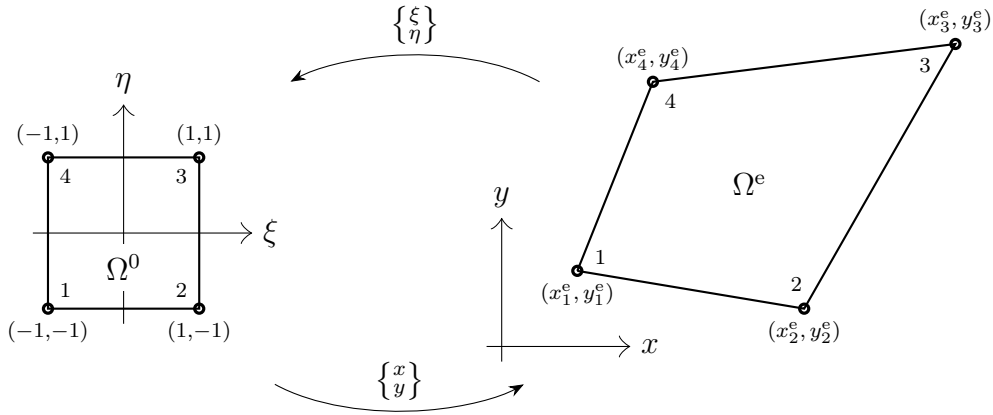
Razvijanjem takvog modela omogućilo bi se računanje lokalnog odziva strukture proizvoljne krutosti kako u hidroelastičnom tako i prijelaznom području. Pri tome bi posebnu pažnju trebalo obratiti načinu računanja dodane mase razmatrane strukture. S obzirom na složenost potpuno spregnutih modela, nužno je u prvom koraku problem formulirati za najjednostavniju strukturu kao što je Eulerova greda kojom bi se aproksimirao ukrepljeni panel.

Jednako tako, s obzirom na složeni oblik funkcije prostorno-vremenske raspodjele tlaka na oplakanoj površini tijela pogotovo kod koveksno-konkavnih poprečnih presjeka pramčanog dijela broda, potrebno bi bilo istražiti mogućnost poboljšanja procedure preslikavanja opterećenja s hidrodinamičkog BEM na strukturni FEM model korištenjem interpolacije radijalnim baznim funkcijama.

A Bilinearni četverokutni izoparametarski element

Domena četverokutnog elementa s ravnim stranicama definirana je položajem četiriju čvornih točaka $(x_i^{\text{el}}, y_i^{\text{el}}) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, 4$. Čvorovi su numerirani u rastućem nizu obrnuto od smjera kretanja kazaljke na satu (Slika ??). U općem slučaju četverokutni konačni element može imati bilo kakav oblik konveksnog poligona.

Definicija A1. Poligon je konveksan ako su svi njegovi unutarnji kutovi manji od π .



Slika A1: Domene bilinearnog četverokutnog elementa

Formulacija elementa [76, 77] izvodi se povezivanjem koordinata polazne domene $\Omega^e = \{x, y\}$ četverokutnog konveksnog poligona s prirodnim koordinatama osnovne domene elementa $\Omega^0 = \{\xi, \eta\}$. Osnovnu domenu čini konveksan poligon kvadratnog oblika čiji čvorovi i su definirani na Slici A1.

Preslikavanje koje povezuje točke u domeni Ω^e s točkama u domeni Ω^0 definirano je na sljedeći način:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i^e \quad (\text{A1})$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i^e \quad (\text{A2})$$

gdje je $N_i(\xi, \eta)$ funkcija oblika čija se jednadžba traži pomoću sljedećih polinoma:

$$x(\xi, \eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta \quad (\text{A3})$$

$$y(\xi, \eta) = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta \quad (\text{A4})$$

gdje su a i b nepoznati parametri koji se određuju iz uvjeta:

$$x(\xi_i, \eta_i) = x_i^e \quad (\text{A5})$$

$$y(\xi_i, \eta_i) = y_i^e \quad (\text{A6})$$

Uvrštavanjem uvjeta (A5) u jednadžbu (A3) te (A6) u (A4) dobivaju se sljedeći sustavi linearnih jednadžbi:

$$\begin{pmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \\ x_4^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad (\text{A7})$$

$$\begin{pmatrix} y_1^e \\ y_2^e \\ y_3^e \\ y_4^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \quad (\text{A8})$$

Rješavanjem oba sustava jednadžbi, uvrštavanjem u (A3) i (A4) te usporedbom s (A1) i (A2) funkcija oblika $N_i(\xi, \eta)$ poprima konačan izgled:

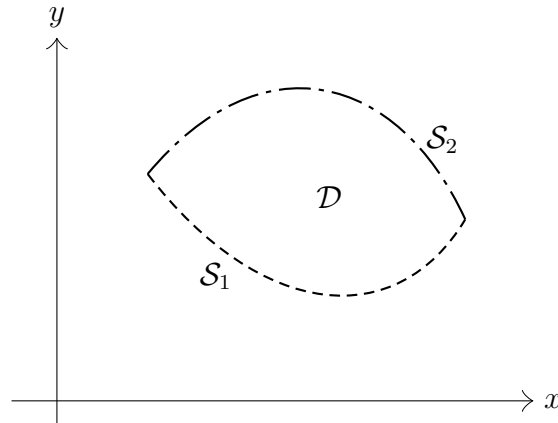
$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad i = 1, \dots, 4 \quad (\text{A9})$$

B Kratak opis metode rubnih elemenata [78]

Općeniti Laplaceov rubni problem na nekoj dvodimenzionalnoj domeni \mathcal{D} okruženom rubom $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ definira se na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \nabla f &= 0 & \text{za } (x, y) \in \mathcal{D} \\ f &= f_1(x, y) & \text{za } (x, y) \in \mathcal{S}_1 \\ \frac{\partial f}{\partial n} &= f_2(x, y) & \text{za } (x, y) \in \mathcal{S}_2 \end{aligned} \quad (\text{B1})$$

Osnovna jednačba problema je linearna, ali to ne podrazumijeva da je i čitavi problem linearan. Linearnost, odnosno nelinearnost problema uvjetuju postavljeni rubni uvjeti na obje granice domene \mathcal{S}_1 i \mathcal{S}_2 .



Slika B1: Skica domene općenitog Laplaceovog rubnog problema

Problem (B1) je dobro postavljen ako rješenje postoji i ako je ono jedinstveno, odnosno ako postoji funkcija $\phi(x, y)$ koja zadovoljava (B1) i ako je ta funkcija jedinstvena. U općem slučaju kod dobro postavljenog problema (B1) vrlo je teško naći egzaktno rješenje. Razlozi pri tome mogu biti različiti, a najčešće je to povezano s geometrijskim oblikom domene \mathcal{D} i rubnim uvjetima. Egzaktno rješenje problema (B1) postoji samo za vrlo jednostavne rubne uvjete na domeni omeđenoj pravilnim geometrijskim oblicima (npr. kružnicom). U svim ostalim slučajevima potrebno je koristiti matematičke tehnike za određivanje približnih rješenja koja uz određene uvjete zadovoljavaju (B1). Primjenom Greenovog trećeg identiteta Laplaceova jednačba u problemu (B1) svodi se na Fredholmovu integralnu jednačbu druge vrste za koju postoji detaljna matematička teorija o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja. U općem obliku Fredholmova integralna jednačba druge vrste glasi:

$$f(t) + \kappa \int_{\mathcal{S}} K(t, s) f(s) d\partial\mathcal{D} = g(t) \quad (\text{B2})$$

gdje je f nepoznata funkcija, κ konstanta, a g i K poznate funkcije od kojih se K naziva i jezgrom integralne jednadžbe. Granica \mathcal{S} domene \mathcal{D} po kojoj se integrira je konstanta. U slučaju da je $g = 0$ (B2) prelazi u homogenu integralnu jednadžbu.

Analitičko rješenje jednadžbe (B2) može se izvesti za ograničeni broj jednostavnih i posebnih slučajeva. U svim ostalim slučajevima potrebno je tražiti približno rješenje koje bi zadovoljavalo (B2) s prihvatljivom točnošću. Aproksimacija točnog rješenja može se napraviti na dva osnovna načina: korištenjem kolokacijske ili Galerkinove metode [78].

Jednadžba (B2) zapisana u operatorskom obliku glasi:

$$(\kappa - \mathcal{K})f = g \quad (\text{B3})$$

gdje je \mathcal{K} kompaktni operator na nekom beskonačno dimenzionalnom Banachovom prostoru $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, pri čemu je $x \in \mathcal{X}$. Pronalaženje približnog rješenja jednadžbe podrazumijeva traženje funkcije u sklopu niza konačno dimenzionalnih podprostora $\{\mathcal{X}_n \subset \mathcal{X} \mid n \geq 1\}$ dimenzije d_n koja zadovoljava pravo rješenje do neke razine točnosti. Ukratko, nepoznata funkcija f aproksimira se novom funkcijom f_n koja se definira kao linearna kombinacija nepoznatih koeficijenata $\{A_1, \dots, A_d\}$ i baznih funkcija $\{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$ koje razapinju linearni prostor dimenzije d :

$$f_n(t) = \sum_{j=1}^d A_j \lambda_j(t), \quad t \in \mathcal{D} \quad (\text{B4})$$

Uvrštavanjem (B4) u (B2) dobiva se integralna jednadžba pogodna za numeričko rješavanje.

Za približno rješavanje jednadžbe potrebno je definirati residuum (ili ostatak) koji pokazuje u kolikoj se mjeri nađena aproksimacija razlikuje od točnog rješenja:

$$r_n(t) = \sum_{j=1}^d A_j \left\{ \lambda_j(t) - \kappa \int_{\mathcal{D}} \mathcal{K}(t, s) \lambda_j(s) ds \right\} - g(t), \quad t \in \mathcal{D} \quad (\text{B5})$$

Kolokacijska metoda. Kod kolokacijske metode zahtjeva se da vrijedi:

$$r_n(t_i) = 0 \quad i = 1, \dots, d_n \quad (\text{B6})$$

gdje je t_i unaprijed odabrani skup točaka $t_1, \dots, t_d \in \mathcal{D}$. To vodi ka određivanju koeficijenata $\{A_1, \dots, A_d\}$ kao rješenja linearnog sustava jednadžbi:

$$\sum_{j=1}^d A_j \left\{ \lambda_j(t_i) - \kappa \int_{\mathcal{D}} \mathcal{K}(t_i, s) \lambda_j(s) ds \right\} = g(t_i) \quad i = 1, \dots, d_n \quad (\text{B7})$$

Galerkinova metoda. U Galerkinovoj metodi približno rješenje integralne jednadžbe traži se u Hilbertovom prostoru $\mathcal{X} = L^2(D)$ na kojem je definiran skalarni produkt (\cdot, \cdot) . Zahtjeva se da je skalarni produkt residuuma r_n i baznih funkcija λ_i jednak nuli:

$$(r_n, \lambda_i) = 0 \quad i = 1, \dots, d_n \quad (\text{B8})$$

Približno rješenje x_n dobiva se primjenom (B8) na (B2) uz $d_n = d$ čime se dolazi do linearnog sustava jednadžbi:

$$\sum_{j=1}^d A_j \left\{ \left(\lambda_j, \lambda_i \right) - \kappa \left(\mathcal{K} \lambda_j, \lambda_i \right) \right\} = \left(y, \lambda_i \right) \quad i = 1, \dots, d \quad (\text{B9})$$

Praktična primjena opisanih metoda podrazumijeva podjelu domene \mathcal{D} na niz segmenata $\Delta_1, \dots, \Delta_n$. Na svakom pojedinom segmentu Δ_i tražena funkcija se aproksimira polinomom niskog stupnja. Sve metode temeljene na ovakvom pristupu nazivaju se po dijelovima polinomne metode koje mogu biti kolokacijskog ili Galerkinovog tipa. Na svakom segmentu Δ_i treba definirati aproksimacijsku funkciju na način opisan izrazom (B4).

Bibliografija

- [1] ISSC-Committee. Impulsive pressure loading and response assessment. In *Proc. of the 17th International Ship and Offshore Structures Congress*, volume 2, pages 367–432, 2009.
- [2] O. M. Faltinsen, M. Landrini, and M. Greco. Slamming in marine applications. *Journal of Engineering Mathematics*, 48:187–217, 2004.
- [3] A. A. Korobkin. Water impact problems in ship hydrodynamics. In M. Ohkusu, editor, *Advances in Marine Hydrodynamics*, chapter 7, pages 323–371. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1996.
- [4] ISSC-Committee. Loads. In *Proc. of the 17th International Ship and Offshore Structures Congress*, volume 1, pages 67–105, 2009.
- [5] C. A. Fellipa, K. C. Park, and C. Farhat. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190:3247–3270, 2001.
- [6] A. de Boer, A. H. van Zuijlen, and H. Bijl. Review of coupling methods for non-matching meshes. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196:1515–1525, 2007.
- [7] S. Mizoguchi and K. Tanizawa. Impact wave loads due to slamming - a review. *Ship Technology Research*, 43:139–154, 1996.
- [8] A. A. Korobkin. Analytical models of water impact. *European Journal of Applied Mathematics*, 16:1–18, 2004.
- [9] A. A. Korobkin and V. V. Pukhnachov. Initial stage of water impact. *Ann. Rev. Fluid Mech*, 20:159–185, 1988.
- [10] T. von Karman. The impact of seaplane floats during loading. Technical report, N.A.C.A., 1929.
- [11] H. Wagner. Über stoß und gleitvorgänge an der oberfläche von flüssigkeiten. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 12(4):193–235, 1932.
- [12] I. Watanabe. Theoretical investigation of wave impact loads on ship. In *Proc. of the 16th Symposium of Naval Hydrodynamics*, Berkeley, 1986.
- [13] R. Cointe and J. L. Armand. Hydrodynamic impact analysis of a cylinder. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 109:237–243, 1987.
- [14] S. D. Howison, J. R. Ockendon, and S. K. Wilson. Incompressible water entry problems at small deadrise angles. *Journal of Fluid Mechanics*, 222:215–230, 1991.

- [15] J. M. Oliver. *Water entry and related problems*. PhD thesis, University of Oxford, 2002.
- [16] O. M. Faltinsen. Water entry of a wedge with finite deadrise angle. *Journal of Ship Research*, 46:39–51, 2002.
- [17] O. F. Hughes. Solution of a wedge entry problem by numerical conformal mapping. *Journal of Fluid Mechanics*, 56:173–192, 1972.
- [18] M. Greenhow. Wedge entry into initial calm water. *Applied Ocean Research*, 9:214–223, 1987.
- [19] T. Vinje and P. Brevig. Nonlinear two-dimensional ship motions. In *Proc. of the 3rd International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics*, pages 257–266, Paris, France, 1981.
- [20] Z. N. Dobrovol'skaya. On some problems of similarity flow with a free surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 36:805–829, 1969.
- [21] R. Zhao and O. M. Faltinsen. Water entry of two dimensional bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, 246:593–612, 1993.
- [22] R. Zhao, O. M. Faltinsen, and J. V. Aarsnes. Water entry of arbitrary two dimensional sections with and without flow separation. In *Proc. of 21st Symposium on Naval Hydrodynamics*, pages 408–423, 1996.
- [23] J. V. Aarsnes. Drop test with ship sections – effect of roll angle. Technical report, Norwegian Marine Technology Research Institute, Trondheim, Norway, 1996.
- [24] W. S. Vorus. A flat cylinder theory for vessel impact and steady planing resistance. *Journal of Ship Research*, 40:89–106, 1996.
- [25] G. V. Logvinovich. Hydrodynamics of flows with free boundaries. *Naukova Dumka*, 1969.
- [26] M. K. Ochi. Ship slamming – hydrodynamic impact between waves and ship bottom forward. In *Proc. of Symposium on Fluid-Solid Interaction*, pages 56–65. ASME, 1967.
- [27] S. L. Chuang. Investigation of impact of rigid and elastic bodies with water. Technical report, David W. Taylor Naval Ship Research and Development Center, 1970.
- [28] M. K. Ochi and L. E. Motter. A method to estimate slamming characteristics for ship design. *Marine Technology*, 8, 1971.
- [29] M. Greenhow and W. M. Lin. Nonlinear free surface effects: experiments and theory. Technical Report 83–19, MIT – Department of Ocean Engineering, 1983.

- [30] S. H. Yang. Experimental and numerical study on the water entry of symmetric wedges and a stern section of modern containership. In *Proc. of the 10th Symposium on Practical Design of Ships and Other Floating Structures*, pages 518–526, Houston, USA, 2007.
- [31] B. Peseux, L. Gornet, and B. Donguy. Hydrodynamic impact: Numerical and experimental investigation. *Journal of Fluid and Structures*, 21:277–303, 2005.
- [32] M. K. Ochi and L. E. Motter. Prediction of slamming characteristics and hull responses for ship design. *Transactions SNAME*, 81:144–176, 1973.
- [33] O. A. Hermundstadt and T. Moan. Efficient methods for direct calculation of slamming loads on ships. *Transactions of SNAME*, 117:156–180, 2009.
- [34] T. E. Schellin and O. el Moctar. Numerical prediction of impact related wave loads on ships. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 129:39–47, 2007.
- [35] O. el Moctar, A. Brehm, and T. E. Schellin. Predictions of slamming loads for ships structural design using potential flow and ranse codes. In *Proc. of 25th Symposium on Naval Hydrodynamics*, pages 116–129. National Academic Press, 2004.
- [36] O. A. Hermundstadt and T. Moan. Numerical and experimental analysis of bow flare slamming on a ro-ro vessel in regular oblique waves. *Journal of Marine Science and Technology*, 10:105–120, 2005.
- [37] O. A. Hermundstadt and T. Moan. Efficient calculation of slamming pressures on ships in irregular seas. *Journal of Marine Science and Technology*, 12:160–182, 2007.
- [38] O. F. Hughes and J. K. Paik. *Ship structural design*. The Society of Naval Architects and Marine Engineers, New Jersey, 2010.
- [39] X. Mei, Y. Liu, and D.K.P. Yue. On the water impact of general two-dimensional sections. *Applied Ocean Research*, pages 1–15, 1999.
- [40] A. A. Korobkin. Semi-analytical approach in generalized wagner model. In *Proc. of International Workshop of Water Waves and Floating Bodies*, pages 85–88, Athens, Greece, 2011.
- [41] R. Cointe. Free surface flows close to a surface-piercing body. In T. Miloh, editor, *Mathematical approaches in hydrodynamic*, chapter 7, pages 319–334. Society for Inadustrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, USA, 1991.
- [42] Jens B. Helmers and Geir Skeie. A meshless boundary element method for simulating slamming in context of generalized wagner. In *Odd M. Faltinsen Honoring Symposium on Marine Hydrodynamics*, volume 9, page 12, Nantes, 2013.

- [43] F. M. Lewis. The inertia of water surrounding a vibrating ship. *SNAME Transactions*, 37, 1929.
- [44] C.V. Kerczek and E.O. Tuck. The representation of ship hulls by conformal mapping functions. *Journal of Ship Research*, pages 284–298, 1969.
- [45] É. Guyon, J.-P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique Physique*. EDP Sciences – CNRS Éditions, Paris, 2012.
- [46] Marvin Shinbrot. *Lectures on fluid mechanics*. Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., New York, 1973.
- [47] J. V. Wehausen and E. V. Latoine. Surface waves. In S. Flugge and C. Truesdell, editors, *Handbuch der Physik*, chapter 9, pages 446–778. Springer Verlag, Berlin, 1960.
- [48] M. Greco. *A Two-dimensional Study of Green-Water Loading*. PhD thesis, Norwegian University of Science and Technology (NTNU), 2001.
- [49] H. Sun. *A Boundary Element Method applied to strongly nonlinear wave-body interaction problems*. PhD thesis, Norwegian University of Science and Technology (NTNU), 2007.
- [50] Y. M. Sclan. A generalized wagner model for dissymmetric bodies. 2006.
- [51] R. Cointe. L’impact hydrodynamique en deux dimensions. application à l’impact de vagues déferlantes. In *1ere Journées de l’Hydrodynamique*, Nantes, 1987.
- [52] I.M.C. Campbell and P.A. Weynberg. Measurement of parameters affecting slamming. Technical Report 440, Southampton University: Wolfson Unit for Marine Technology, 1980.
- [53] E. V. Lewis and G. Gerard. A long range research program in ship structural design. Technical Report SSC–124, Ship Structure Committee, 1959.
- [54] Panel HS-2. Impact loading and response – notes on ship slamming. Technical report, Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1993.
- [55] M.S. Samuelides, D. Daliakopoulos, and J.K. Paik. Simulation of response of steel plates under pressure pulses. In *Proc. of the 10th Inter. Sym. on Practical Design of Ships and Other Floating Structures*, pages 823–830, Houston, United States, 2007.
- [56] J.K. Paik, J.M. Lee, Y.S. Shin, and G. Wang. Design principles and criteria for ship structures under impact pressure loads arising from sloshing, slamming and green seas. In *Proc. of SNAME Annual meeting*, pages 292–313, Washington DC, United States, 2007.

- [57] ISSC-Committee. Impulsive pressure loading and response assessment. In *Proc. of the 18th International Ship and Offshore Structures Congress*, volume 2, pages 275–330, 2012.
- [58] ABS. *Slamming loads and strength assessment for vessels*. American Bureau of Shipping, Houston, Texas USA, 2011.
- [59] A. A. Korobkin, R. Guéret, and Š. Malenica. Hydroelastic coupling of beam finite element model with wagner theory of water impact. *Journal of Fluids and Structures*, 22:493–504, 2006.
- [60] H. Lee, J.W. Kim, and C. Hwang. Dynamic stress analysis for membrane type lng containment system due to sloshing impact load. In *Proc. of International Conference on Design and Operation of Gas Carriers*, pages 159–176, London, UK, 2004.
- [61] S.G. Lee, K.S. Choi, K.S. Lee M.S. Kim, and J.W. Park. A study on prediction of impact loads of bow structure. In *Proc. of 8th International Offshore and Polar Engineering Conference*, pages 353–360, Montreal, Canada, 1998.
- [62] S.R. Cho, W.R. Lim, and C.B. Park. Development of design formula for predicting damage extents of unstiffened plates under impulsive pressure loadings. In *Proc. of 25th Asian-Pacific Technical Exchange and Advisory Meeting on Marine Structures*, pages 699–706, Incheon, Korea, 2011.
- [63] S. L. Chuang. Experiments on slamming of ship flat-bottom structural models. Technical Report 2528, David W. Taylor Naval Ship Research and Development Center, 1968.
- [64] S. L. Chuang. Slamming tests of structural models representing a ship bottom with 10° deadrise angle. Technical Report 3008, David W. Taylor Naval Ship Research and Development Center, 1969.
- [65] A. A. Korobkin. Dynamic loads on elastic structures. In Š. Malenica, editor, *Some aspects of slamming loads on ships*, chapter 1. Bureau Veritas, Paris, 2002.
- [66] O. M. Faltinsen. Water entry of a wedge by hydroelastic orthotropic plate theory. *Journal of Ship Research*, 43:180–193, 1999.
- [67] O. M. Faltinsen. The effect of hydroelasticity on ship slamming. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.*, 355:575–591, 1997.
- [68] G. K. Kapsenberg. Slamming of ships: where are we now? *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.*, 369:2892–2919, 2011.
- [69] Johan Tuitman. *Hydro-elastic response of ship structures to slamming induced loads*. PhD thesis, Technische Universiteit Delft, 2010.

- [70] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover Publications, Mineola, New York, 1972.
- [71] Š. Malenica, F. X. Sireta, S. Tomašević, and J. T. Tuitman and I. Schipperen. Local hydro-structure interaction due to slamming. In *Proc. of MARSTRUCT: Analysis and Design of Marine Structures*, pages 45–49, Lisabon, Portugal, 2009.
- [72] T. Jančijev. Program za proračun odziva konstrukcije na udarno opterećenje. In *III. simpozij Teorija i praksa brodogradnje in memoriam prof. Leopold Sorta*, volume 1, pages 3.130–3.140, Zagreb, 1978.
- [73] *NX NASTRAN Quick Reference Guide*. Siemens Product Lifecycle Management Software Inc., 2014.
- [74] *MSC NASTRAN Linear Static Analysis User's Guide*. MSC.Software Corporation, 2012.
- [75] DNV. *Environmental conditions and environmental loads*. Det Norske Veritas, 2010.
- [76] Thomas J.R. Hughes. *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications Inc., Mineola, New York, 2000.
- [77] K. J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- [78] K. E. Atkinson. *The numerical solution of integral equations of the second kind*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

Životopis

Mate Grgić rođen je 29. listopada 1978. godine u Šibeniku. Osnovnu školu i opću gimnaziju završio je u Zagrebu. Studij brodogradnje na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu upisao je 1997. godine na kojem diplomira 2005. godine. Od svibnja 2006. do svibnja 2013. bio je zaposlen na Fakultetu strojarstva i brodogradnje, na Zavodu za brodogradnju i pomorsku tehniku, u zvanju znanstvenog novaka na katedri za hidrodinamiku plovnih objekata. U akademskoj godini 2005./2006. upisao je poslijediplomski doktorski studij Brodogradnja i pomorska tehnika. Sudjelovao je u istraživačkom radu pod vodstvom prof.dr.sc. Vedrana Žanića u okviru projekta "Višekriterijski projektni modeli u osnivanju i konstrukciji broda i zrakoplova", financiranog od strane Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske te EU FP6 projekata "IMPROVE" i "DeLight Transport".

Biography

Mate Grgić was born on October 29th 1978 in Šibenik, Croatia. He finished elementary and secondary school in Zagreb. He enrolled in 1997 in the Naval Architecture course at the University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, graduating in Naval Architecture in 2005. Since May 2006 till May 2013 he was employed as a research assistant at the University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, Department of Naval Architecture and Offshore Engineering, Chair of Ship Hydrodynamics. In 2005 he enrolled in the PhD programme on naval architecture and offshore engineering at the University of Zagreb. He was involved in the research work under the project "Multicriteria models in design of ship and airplane structures", financed by the Ministry of Science, Education and Sports of the Republic of Croatia, and the EU FP6 projects "IMPROVE" and "DeLight Transport".